Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2023/2024

جامعة أبو بكر بلقايد
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

2ème année MATH- Semestre 2

Examen final : Analyse 4

Durée : 1h30mn

L'usage de tout document ou appareil électronique est strictement interdit.

Exercice 1. (5.5 Pts)

1) Montrer que l'équation

$$z^3 + 2z + e^{z-x-y^2} = \cos(x - y + z)$$

définit implicitement z comme fonction C^∞ de x et y au voisinage de $(0,0)$ qui s'annule en 0.

2) Calculer les dérivées partielles de z à l'ordre 2 en 0.

Exercice 2. (6.5 Pts)

On considère l'équation aux dérivées partielles suivante

$$2xy\frac{\partial f}{\partial x} + (1+y^2)\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad (E)$$

sur le demi-plan $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad y \in \mathbb{R}, \quad x > 0)\}$.
Soit

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+ \to P$$
$$(u,v) \mapsto (x,y) = \left(\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u}{v}\right)$$

1) Montrer que φ est bijective et de classe C^1.
2) Pour toute fonction f définie sur P, on pose $F = f \circ \varphi$.
Calculer la matrice jacobienne de F, notée $JF(u,v)$.
3) En déduire l'expression de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial F}{\partial u}$ et $\frac{\partial F}{\partial v}$.
4) Montrer que les fonctions f solutions de (E) sont les fonctions qui peuvent s'écrire sous la forme

$$f(x,y) = g\left(\sqrt{\frac{2x}{1+y^2}}\right)$$

avec $g \in C^1(\mathbb{R}_*^+)$.

Exercice 3. (8 Pts)

I) Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2+y^2-2x \leq 0, \quad x^2+y^2-2y \geq 0, \text{et} \quad y \geq 0\}$.
1) Tracer le domaine D.
2) Calculer l'aire du domaine D.
3) Calculer

$$\iint_D (x+y)^2 dxdy.$$

II) Calculer le volume du domaine

$$\Delta = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x^2+y^2 \leq a^2, \quad |x| \leq a+y, \quad a>0, \text{et} \quad 0 \leq z \leq x^2+y^2\}.$$

Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2023/2024

جامعة أبو بكر بلقايد
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

2ème année M.I - Semestre 2

Corrigé de l'examen final : Analyse 4

Durée : 1h30mn

Exercice 1. (5.5 Pts)

1) On pose $f(x,y,z) = z^3 + 2z + e^{z-x-y^2} - \cos(x-y+z)$.
Alors, on remarque que
i) $f(0,0,0) = 0$ **(0,25 Pt)**
ii) la dérivée de f par rapport à z est

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 3z^2 + 2 + e^{z-x-y^2} + \sin(x-y+z). \quad (\mathbf{0,25Pt})$$

Donc, $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = 3 \neq 0$. **(0,25 Pt)**
Par le théorème des fonctions implicites, il existe un voisnage U de $(0,0)$ et une application φ : $U \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(0,0) = 0$ et $f(x,y,\varphi(x,y)) = 0$. **(0,25 Pt)**
2) On sait que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y)} \quad (\mathbf{0,25Pt}) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y)} \quad (\mathbf{0,25Pt})$$

Puisque $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -e^{z-x-y^2} + \sin(x-y+z)$ **(0,25 Pt)** et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -2ye^{z-x-y^2} + \sin(x-y+z)$, **(0,25 Pt)** alors

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = -\frac{-e^{\varphi(x,y)-x-y^2} + \sin(x-y+\varphi(x,y))}{3\varphi^2(x,y) + 2 + e^{\varphi(x,y)-x-y^2} + \sin(x-y+\varphi(x,y))} \quad (1)$$

et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = -\frac{-2ye^{\varphi(x,y)-x-y^2} + \sin(x-y+z)}{3\varphi^2(x,y) + 2 + e^{\varphi(x,y)-x-y^2} + \sin(x-y+\varphi(x,y))} \quad (2)$$

Alors,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0) = \frac{1}{3} \quad (\mathbf{0,25Pt}) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0) = 0. \quad (\mathbf{0,25Pt})$$

De l'équation (1), on a

$$3\varphi^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2\frac{\partial \varphi}{\partial x} + (\frac{\partial \varphi}{\partial x} - 1)e^{\varphi-x-y^2} + (1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x})\sin(x-y+\varphi) = 0. \quad (3)$$

On dérive cette dernière par rapport à x, on obtient

$$6\varphi(\frac{\partial \varphi}{\partial x})^2 + 3\varphi^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}e^{\varphi-x-y^2} + (\frac{\partial \varphi}{\partial x} - 1)^2 e^{\varphi-x-y^2}$$

$$+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\sin(x-y+\varphi) + (1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x})^2\cos(x-y+\varphi) = 0. \quad (\mathbf{1Pt})$$

Donc, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(0,0) = -\frac{20}{27}$. **(0,25 Pt)**
De l'équation (2), on a

$$3\varphi^2\frac{\partial \varphi}{\partial y} + 2\frac{\partial \varphi}{\partial y} + (\frac{\partial \varphi}{\partial y} - 2y)e^{\varphi-x-y^2} + (\frac{\partial \varphi}{\partial y} - 1)\sin(x-y+\varphi) = 0$$

En dérivant par rapport à y, on obtient

$$6\varphi(\frac{\partial\varphi}{\partial y})^2 + 3\varphi^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + (\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - 2)e^{\varphi-x-y^2} + (\frac{\partial\varphi}{\partial y} - 2y)^2 e^{\varphi-x-y^2}$$

$$+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\sin(x-y+\varphi) + (\frac{\partial\varphi}{\partial y} - 1)^2\sin(x-y+\varphi)) = 0. \quad (\mathbf{1Pt})$$

Ainsi, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(0,0) = \frac{2}{3}$. **(0,25 Pt)**
Maintenant, en dérivant l'équation (3) par rapport à y, on obtient

$$6\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + 3\varphi^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}e^{\varphi-x-y^2} + (\frac{\partial\varphi}{\partial x} - 1)(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - 2y)e^{\varphi-x-y^2}$$

$$+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\sin(x-y+\varphi) + (1+\frac{\partial\varphi}{\partial x})(-1+\frac{\partial\varphi}{\partial y})\cos(x-y+\varphi) = 0. \quad (\mathbf{0,25Pt})$$

Ainsi, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(0,0) = \frac{4}{9}$. $(\mathbf{0,25Pt})$

Exercice 2. (6.5 Pts)

1) L'application φ est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_*^+$. **(0,25 Pt)** Il reste à montrer que φ est bijective. Pour cela, on a

$$\begin{cases} \frac{u^2+v^2}{2} &= x \\ \frac{u}{v} &= y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2+v^2 &= 2x \\ u &= vy \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(1+y^2) &= 2x \\ u &= vy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v &= \sqrt{\frac{2x}{1+y^2}} \\ u &= \sqrt{\frac{2x}{1+y^2}}y \end{cases}$$

Donc, φ est bijective de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_*^+$ sur P. **(0,5 Pt)**
2) On a $(x,y) = (x(u,v), y(u,v)) = (\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u}{v})$.
D'autre part, on sait que $JF(u,v) = J(f\circ\varphi)(u,v) = Jf(x,y)J\varphi(u,v)$. **(0,25 Pt)** Donc,

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u & v \\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2}\end{pmatrix} \quad (\mathbf{0,5Pt})$$

Donc,

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = u\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u}{v}) + \frac{1}{v}\frac{\partial f}{\partial y}(\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u}{v}) \quad (\mathbf{0,5Pt})$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = v\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u}{v}) - \frac{u}{v^2}\frac{\partial f}{\partial y}(\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u}{v}) \quad (\mathbf{0,5Pt})$$

3) Par un calcul simple, on montre que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (\frac{1}{u^2+v^2})\left(u\frac{\partial F}{\partial u} + v\frac{\partial F}{\partial v}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (\frac{u^2}{u^2+v^2})\left(v\frac{\partial F}{\partial u} - u\frac{\partial F}{\partial v}\right) \quad (\mathbf{1,5Pts})$$

4)En remplaçant les deux termes précédents dans (E), on obtient

$$2(\frac{u^2+v^2}{2})(\frac{u}{v})(\frac{1}{u^2+v^2})\left(u\frac{\partial F}{\partial u} + v\frac{\partial F}{\partial v}\right) + (1+\frac{u^2}{v^2})(\frac{u^2}{u^2+v^2})\left(v\frac{\partial F}{\partial u} - u\frac{\partial F}{\partial v}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\frac{u^2}{v^2})\frac{\partial F}{\partial u} + u\frac{\partial F}{\partial v} + v\frac{\partial F}{\partial u} - u\frac{\partial F}{\partial v} = 0$$
$$\Leftrightarrow (\frac{u^2+v^2}{v})\frac{\partial F}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial u} = 0. \quad (\mathbf{1Pt})$$

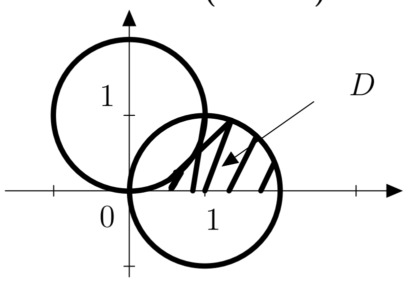
Donc, F ne dépend pas de u, çàd , il existe une fonction g telle que

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+, \quad F(u,v) = g(v). \quad (\mathbf{0,5Pt})$$

Puisque $F = f \circ \varphi$, alors $f = F \circ \varphi^{-1}$, donc $\forall (x,y) \in P$, on a $f(x,y) = F(\varphi^{-1}(x,y))$.
Sachant que $\varphi^{-1}(x,y) = (\sqrt{\frac{2x}{1+y^2}}y, \sqrt{\frac{2x}{1+y^2}})$, alors

$$f(x,y) = F(\sqrt{\frac{2x}{1+y^2}}y, \sqrt{\frac{2x}{1+y^2}}) = g(\sqrt{\frac{2x}{1+y^2}}). \quad (\mathbf{1Pt})$$

Exercice 3. (8 Pts)
1) On remarque que $x^2+y^2-2x \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 \leq 1$ et $x^2+y^2-2y \geq 0 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2 \geq 1$.
Ainsi, le domaine D est l'intersection d'un disque de centre $(1,0)$ et de rayon 1 avec l'éxtérieur d'un disque de centre $(0,1)$ et de rayon 1 dans le demi-plan $y \geq 0$. **(0,5 Pt)**
Donc le domaine D possède la forme suivante **(0.5 Pt)**



2) On sait que $Aire(D) = \iint_D dxdy$. Alors, en utilisant les coordonnées polaires, on obtient

$$Aire(D) = \iint_{D'} r dr d\theta$$

avec $D' = \{(r,\theta), \quad 2\sin(\theta) \leq r \leq 2\cos(\theta), \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{4}]\}$.
Ainsi,

$$Aire(D) = \int_0^{\pi/4} \int_{2\sin(\theta)}^{2\cos(\theta)} r dr d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \left[r^2\right]_{2\sin(\theta)}^{2\cos(\theta)} d\theta$$
$$= 2\int_0^{\pi/4} (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) d\theta = 2\int_0^{\pi/4} \cos(2\theta) d\theta$$
$$= 2\left[\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi/4} = 1 \quad \text{unité de mesure} \quad (\mathbf{2Pts})$$

3)I) Calculons $I = \iint_D (x+y)^2 dxdy$. Pour simplifier, on utilise encore les coordonées polaires pour obtenir

$$I = \int_0^{\pi/4} \int_{2\sin(\theta)}^{2\cos(\theta)} r^3(\cos(\theta)+\sin(\theta))^2 dr d\theta$$
$$= \int_0^{\pi/4} (1+2\sin(\theta)\cos(\theta)) \left[\frac{r^4}{4}\right]_{2\sin(\theta)}^{2\cos(\theta)} d\theta$$
$$= 4\int_0^{\pi/4} (1+2\sin(\theta)\cos(\theta))(\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)) d\theta$$
$$= 2\int_0^{\pi/4} 2(1+2\sin(\theta)\cos(\theta))(\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)) d\theta$$

$$= [(1 + 2\sin(\theta)\cos(\theta))]_0^{\pi/4} = 3. \quad (\mathbf{2Pts})$$

II) Maintenant, pour le volume de Δ, on a

$$Vol(\Delta) = \iiint_\Delta dxdydz = \iint_B (x^2 + y^2) dxdy$$

où

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 \leq a^2, \quad |x| \leq a + y, \quad a > 0\}$$

On peut diviser le domaine en deux , un demi-disque de centre 0 et de rayon a et un triangle. Voir figure au dessous

Ainsi,

$$Vol(A) = \int_0^\pi \int_0^a r r^2 dr d\theta + \int_{-a}^0 \int_{-a-y}^{a+y} (x^2 + y^2) dxdy$$

$$= \pi \frac{a^4}{4} + \int_{-a}^0 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x\right]_{-a-y}^{a+y} dy$$

$$= \pi \frac{a^4}{4} + \int_{-a}^0 \left[\frac{2}{3}(a + y)^3 + 2y^2(a + y)\right] dy$$

$$= \pi \frac{a^4}{4} + \left[\frac{1}{6}(a + y)^4 + \frac{2}{3} a y^3 + \frac{y^4}{2}\right]_{-a}^0$$

$$= \pi \frac{a^4}{4} + \frac{1}{6} a^4 + \frac{2}{3} a^4 - \frac{a^4}{2} = a^4 (\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}). \quad (\mathbf{3Pts})$$