E.F. Algèbre 4 Durée 1H30 26-05-2024

Exercice 1 : Soit q une forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2$$

1- Appliquer le critère de Sylvester pour donner le signe de q puis déduire sa signature avec justification.

2- q Est-elle non dégénérée ? est-elle définie ?

3- Donner la réduction de q.

4- Trouver le cône isotrope de q.

5- Soit $G, H \in M_2(\mathbb{R})$ ou H est associée à q relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et tel que $G^tHG = diag(1,1)$. Trouver G et montrer qu'elle est inversible.

6- Trouver la forme polaire f_q de q.

7- L'espace $\mathbb{R}^2$ muni de la forme f_q est-il Euclidien ?

8- Orthonormaliser les vecteurs colonnes de G.

Exercice 2 : Soit $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, muni du produit scalaire $<,>$ défini par : $< P , Q > = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$. Déterminer le polynôme, projection orthogonale de $P(X) = X^3 + 2$ sur le sous espace $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \, / \, P(X) = aX + bX^2,\ a, b \in \mathbb{R}\}$, puis donner la valeur de $\min\limits_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (X^3 - aX - bX^2 + 2)^2 dX$.

Exercice 3 : On considère dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique deux sous espaces supplémentaires $K = vect(-1, 2, 0)$ et L. On fait la projection orthogonale sur L parallèlement à K.

Si on note par p_L cette projection, donner l'expression de $p_L(v)$, avec $v = (x, y, z)$. Si on note par s_K la symétrie orthogonale de v par rapport à $\ker(p_L)$, trouver la matrice représentative de cette symétrie.

وزارة التعليم العالي و البحث العلمـي
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة أبوبكر بلقايد - تلمسان - كلية العلوم
UNIVERSITÉ ABOU-BAKR BELKAID - TLEMCEN - FACULTÉ DES SCIENCES

Année Universitaire........ السنة الدراسية | Nom........ اللقب
Examen........ الإختبار | Prénom........ الإسم
Date........ التاريخ | Né (e) le........ تاريخ الإزدياد
Signature de l'Etudiant........ امضاء الطالب | N° Carte d'Etudiant........ رقم بطاقة الطالب

Observations ملاحظــات

Sur 21 pts

Note النقطة /20

Corrigé EF Algèbre 4 26-05-24

9 pts Exercice 1 : $q(\vec{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2$

1) $M_q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$: les mineurs principaux :

0,5 $\Delta_1 = 1 \geq 0$, $\Delta_2 = 2 \geq 0$ donc $q(\vec{x}) \geq 0 \ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$

En plus,

0,5 On a : $\Delta_2 = 2 \neq 0 \Rightarrow rg(M_q) = rg(q) = 2$, donc $sg(q) = (2,0)$

2) $Ker(q) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 / M_q\vec{x} = \vec{0}\}$

On résout donc $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

0,5 • $Ker(q) = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow q$ non dégénérée.

0,5 • Comme $x_1^2 + 3x_2^2 \geq 0$ alors $(q(\vec{x}) = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0})$.

Donc q est définie.

3) réduction de q :

$q(\vec{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2$

$= (x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2) + 2x_2^2$

0,5 $= (x_1 - x_2)^2 + 2x_2^2 = l_1^2(x_1,x_2) + 2l_2^2(x_1,x_2)$

avec $l_1(x_1,x_2) = x_1 - x_2$ et $l_2(x_1,x_2) = x_2$

0,5 $\{l_1, l_2\}$ est une famille libre car $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

4) Cône isotrope de q :

0,5 $C(q) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 / q(\vec{x}) = 0\} = \{\vec{0}\}$

5) $G, H \in M_2(\mathbb{R})$; où $H = M_q$.

Comme $G^t H G = diag(1,1)$ alors

0,5 prenons $l_1(x_1,x_2) = x_1 - x_2$ et $l_2(x_1,x_2) = \sqrt{2}x_2$

Comme ça on aura $q(\vec{x}) = 1 l_1^2(x_1,x_2) + 1 l_2^2(x_1,x_2)$

et $diag(1,1)$ est la matrice diagonale représentative

de q dans la base q-orthogonale $\{v_1, v_2\}$ où

v_1 et v_2 sont les vecteurs colonnes de G.

0,5 On résoud donc $\begin{cases} x_1 - x_2 = a \\ \sqrt{2}\, x_2 = b \end{cases}$

0,5 $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = a + b/\sqrt{2} = a + \frac{\sqrt{2}}{2} b \\ x_2 = b/\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} b. \end{cases}$

0,5 D'où $G = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 \end{array}$

0,5 $\det G = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0 \Rightarrow G$ inversible.

On vérifie bien que ;

$G^t H G = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & +2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(1,1)$

6) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$; $\vec{x} = (x_1, x_2)$ et $\vec{y} = (y_1, y_2)$

0,5 $f_q(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + 3 x_2 y_2 - x_1 y_2 - x_2 y_1$

7) f_q est bilinéaire : c'est la forme polaire de q

f_q est symétrique : c'est la forme polaire de q.

0,5 f_q est positive : car q est positive d'après 3a)

f_q est définie : car q est définie

0,5 Concl : f_q est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$

Donc $(\mathbb{R}^2, f_q)$ est un espace Euclidien.

8) Les vecteurs colonnes v_1 et v_2 de G

0,5 sont q-orthogonaux, donc $f_q(v_1, v_2) = 0$

$\det G \neq 0 \Rightarrow \{v_1, v_2\}$ libre,

card $\{v_1, v_2\} = \dim \mathbb{R}^2 = 2$ donc $\{v_1, v_2\}$ une

0,5 base de $\mathbb{R}^2$. $\|v_1\|^2 = f_q(v_1, v_1) = 1$

0,5 et $\|v_2\|^2 = f_q(v_2, v_2) = 1$

Concl : $\{v_1, v_2\}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$ selon le produit scalaire f_q.

5pts Exercice 2

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \;/\; P(X) = aX + bX^2,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

F est un sous espace vect de $\mathbb{R}_3[X]$.

0,5 $\{X, X^2\}$ est une base de F.

Elle n'est pas orthonormée : En effet,

0,5 $\langle X, X^2 \rangle = \int_0^1 X^3 dX = \frac{1}{4} \neq 0$

0,5 $\langle X, X \rangle = \|X\|^2 = \int_0^1 X^2 dX = \frac{1}{3} \neq 1$

0,5 $\langle X^2, X^2 \rangle = \|X^2\|^2 = \int_0^1 X^4 dX = \frac{1}{5} \neq 1$

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة أبوبكر بلقايد - تلمسان - كلية العلوم
UNIVERSITÉ ABOU-BAKR BELKAID - TLEMCEN - FACULTÉ DES SCIENCES

Année Universitaire .... السنة الدراسية | Nom .... اللقب
Examen .... الإختبار | Prénom .... الإسم
Date .... التاريخ | Né (e) le .... تاريخ الإزدياد
Signature de l'Etudiant .... امضاء الطالب | N° Carte d'Etudiant .... رقم بطاقة الطالب

Observations ملاحظات

Note النقطة /20

Orthonormaliser $\{X, X^2\}$:

Procédé de Gram-Shmidt :

Soit $\{P_1, P_2\}$ la base orthonormale

0,5 • $P_1(X) = \frac{X}{\|X\|} = \sqrt{3}X$

0,5 • $P_2(X) = \frac{X^2 - \langle X^2, P_1\rangle P_1}{\|X^2 - \langle X^2, P_1\rangle P_1\|}$

0,5 $X^2 - \langle X^2, P_1\rangle P_1 = X^2 - \left(\int_0^1 \sqrt{3}X^3 dX\right)\sqrt{3}X = X^2 - \frac{3}{4}X$

$\|X^2 - \langle X^2, P_1\rangle P_1\|^2 = \int_0^1 (X^2 - \frac{3}{4}X)(X^2 - \frac{3}{4}X)\, dX = \frac{24}{1920} - \frac{3}{240}$

$= \frac{1}{80}$

0,5 D'où : • $P_2(X) = 4\sqrt{5}X^2 - 3\sqrt{5}X$

5

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة ابوبكر بلقايد - تلمسان - كلية العلوم
UNIVERSITÉ ABOU-BAKR BELKAID - TLEMCEN - FACULTÉ DES SCIENCES

Année Universitaire .... السنة الدراسية
Examen .... الإختبار
Date .... التاريخ
Signature de l'Etudiant .... امضاء الطالب

Nom .... اللقب
Prénom .... الإسم
Né (e) le .... تاريخ الإزدياد
N° Carte d'Etudiant .... رقم بطاقة الطالب

Observations ملاحظات

Note النقطة /20

• Projection de $P(x)=x^3+2$ sur F.

Une base orthonormale de F est $\{P_1(x), P_2(x)\}$:

0,5 $P_F(x^3+2) = \langle x^3+2, P_1(x)\rangle P_1(x) + \langle x^3+2, P_2(x)\rangle P_2(x)$

$$\langle x^3+2, P_1(x)\rangle = \int_0^1 (x^3+2)\sqrt{3}\,x\,dx$$

$$= \int_0^1 (\sqrt{3}x^4 + 2\sqrt{3}x)\,dx = \frac{\sqrt{3}}{5} + \sqrt{3} = \frac{6\sqrt{3}}{5}$$

$$\langle x^3+2, P_2(x)\rangle = \int_0^1 (x^3+2)(4\sqrt{5}x^2 - 3\sqrt{5}x)\,dx$$

$$= \int_0^1 (4\sqrt{5}x^5 - 3\sqrt{5}x^4 + 8\sqrt{5}x^2 - 6\sqrt{5}x)\,dx$$

$$= \frac{4\sqrt{5}}{6} - \frac{3\sqrt{5}}{5} + \frac{8\sqrt{5}}{4} - \frac{6\sqrt{5}}{2} = -\frac{14}{15}\sqrt{5}$$

Suite (5)

Donc :
$$P_F(X^3+2) = \frac{6}{5}\sqrt{3}\,P_1(X) - \frac{14}{15}\sqrt{5}\,P_2(X)$$

$$P_F(X^3+2) = \frac{6}{5}\sqrt{3}\,\sqrt{3}X - \frac{14}{15}\sqrt{5}\,(4\sqrt{5}X^2 - 3\sqrt{5})X$$

0,5 $$P_F(X^3+2) = \frac{18}{5}X - \frac{56}{3}X^2 + 14X = \frac{88}{5}X - \frac{56}{3}X^2$$

D'où
$$\min_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 \left((X^3+2) - (aX+bX^2)\right)^2 dX$$

$$= \int_0^1 \left[(X^3+2) - \left(\frac{88}{5}X - \frac{56}{3}X^2\right)\right]^2 dX$$

$= \ldots$ Calcul long = valeur de

$$\min_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 \left[(X^3+2) - (aX+bX^2)\right]^2 dX$$

7pts **Exercice 3** $K = \text{vect}(-1,2,0)$

L = plan dont un vect. normal est $(-1,2,0)$

0,5 L'équation de L est : $-x+2y=0$

D'où $(x,y,z) \in L \Leftrightarrow (x,y,z) = (2y, y, z)$

0,5 Donc : $L = \text{Vect}(\underbrace{(2,1,0)}_{u_1}, \underbrace{(0,0,1)}_{u_2})$

$B = \{u_1, u_2\}$ est une base de L

0,5 On remarque que $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$ et $\|u_2\| = 1$

0,5 On pose $v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{\sqrt{5}}{5}(2,1,0)$, on a $\|v_1\| = 1$

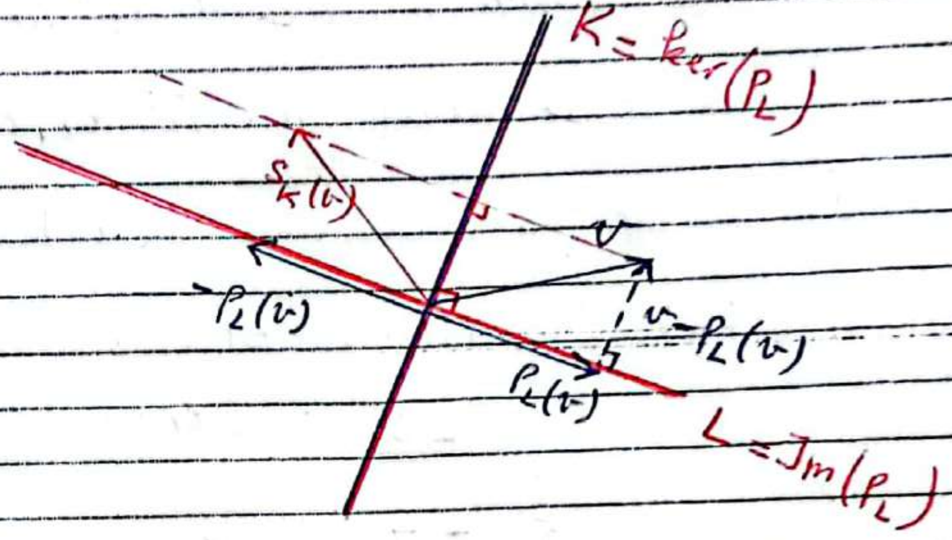
0,5 $\{v_1, v_2\}$ est une base orthonormale, avec :

$v_1 = \frac{\sqrt{5}}{5} u_1$ et $v_2 = u_2$.

suite 6

• Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

0,5



0,5 • $P_L(v) = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \langle v, v_2 \rangle v_2$

$= \langle v, \frac{\sqrt{5}}{5} u_1 \rangle \frac{\sqrt{5}}{5} u_1 + \langle v, u_2 \rangle u_2$

$= \frac{5}{25} \langle v, u_1 \rangle u_1 + \langle v, u_2 \rangle u_2$

0,5 $= \frac{1}{5} \langle v, u_1 \rangle u_1 + \langle v, u_2 \rangle u_2$

$= \frac{1}{5} (2x + y)(2, 1, 0) + z(0, 0, 1)$

0,5 $= \frac{1}{5} (4x + 2y, 2x + y, 5z)$

• $S_K(v) = (-P_L(v)) + (v - P_L(v))$ (voir figure)

0,5 $= v - 2 P_L(v)$

$= (x, y, z) - \frac{2}{5} (4x + 2y, 2x + y, 5z)$

0,5 $= \left(-\frac{3}{5} x - \frac{4}{5} y, -\frac{4}{5} x + \frac{3}{5} y, -z\right)$

0,5 $= \frac{1}{5} (-3x - 4y, -4x + 3y, -5z)$

La matrice associée à S_K relativement à la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ est formée

0,5 de vecteurs colonnes $S_K(e_1)$, $S_K(e_2)$ et $S_K(e_3)$:

Soit S cette matrice,

0,5 $$S = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

FIN