Université de Tlemcen. le 23/05/2024.
Département de mathématiques.
L2 Mathématiques.
Module : Analyse complexe.

durée : 1h30

# ÉPREUVE FINALE

## Exercice n° 1

Soit une fonction uniforme holomorphe sur un cercle $C$ et à l'intérieur de $C$, sauf au point $z_0$ centre de $C$.

1/ Donner la définition du résidu de $f$ au point $z_0$ $\left(\mathrm{Res}(f,z_0)\right)$

2/ D'après un théorème du cours, sous ces hypothèses, $f$ admet un developpement en série de Laurent centrée en $z_0$ :

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{où} \quad a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \quad n\in\mathbb{Z},$$

montrer que si $z_0$ est un pôle d'ordre $m$ de $f$ alors :

$$\mathrm{Res}(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]$$

## Exercice n° 2

Calculer $I=\int_C \frac{\cos(\pi z)}{(z+1)(z-3)}\,dz$ où $C$ est le cercle de centre 0 et de ray

## Exercice n° 3

Soit $a>1$, évaluer $I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}$

## Exercice n° 4

Évaluer $I=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}\,dx$.

Exercice 1 : 5 pts ; Exercice n° 2 : 4 pts ; Exercice n° 3 : 6 pts ; Exercice n° 4 : 5

Bon Courage

M. Mebkhout

Université de Tlemcen. le 23/05/2024.

Département de mathématiques

L2 Mathématiques.

Module : Analyse complexe.

# Corrigé de l'épreuve finale

## Exercice n° 1

1/ Soit f une fonction holomorphe sur un cercle C et à l'intérieur de C, sauf au point $z_0$, centre de C. Donner la définition du résidu de f au point $z_0$.

**Solution**

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) \cdot dz$$

2/ D'après un théorème du cours, sous ces hypothèses, f admet un développement en série de Laurent centrée en $z_0$ 1

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{où} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz,$$

montrer que si $z_0$ est un pôle d'ordre m de f alors :

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[ (z-z_0)^m f(z) \right]$$

**Solution**

Si $z_0$ est un pôle d'ordre m de f alors

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-(m-1)}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)^1} + \sum_{m=0}^{+\infty} a_m (z-z_0)^m$$



M. Mebkhout

En multipliant les deux membres par $(z-z_0)^m$, on obtient :

$$(z-z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-(m-1)}(z-z_0) + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{m-1} + \sum_{m=0}^{+\infty} a_m (z-z_0)^{2m}$$

qui est une serie entière de somme $(z-z_0)^m f(z)$.

Par dérivation $(m-1)$ fois, on trouve.

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right] = (m-1)!\, a_{-1} + \sum_{m=0}^{+\infty} (2m)\cdot(2m-1)\cdots(m+2)\, a_m (z-z_0)$$

Par passage à la limite quand $z \to z_0$, on trouve

$$\lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right] = (m-1)!\, a_{-1}$$

$$\underset{1}{=} (m-1)!\, \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)\,.dz}{(z-z_0)^{-1+1}} = (m-1)!\, \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z).\,dz$$

$$\Longrightarrow \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0) f(z)\right] = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z).\,dz$$

$$\overset{1/}{\Longrightarrow} \mathbf{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]$$

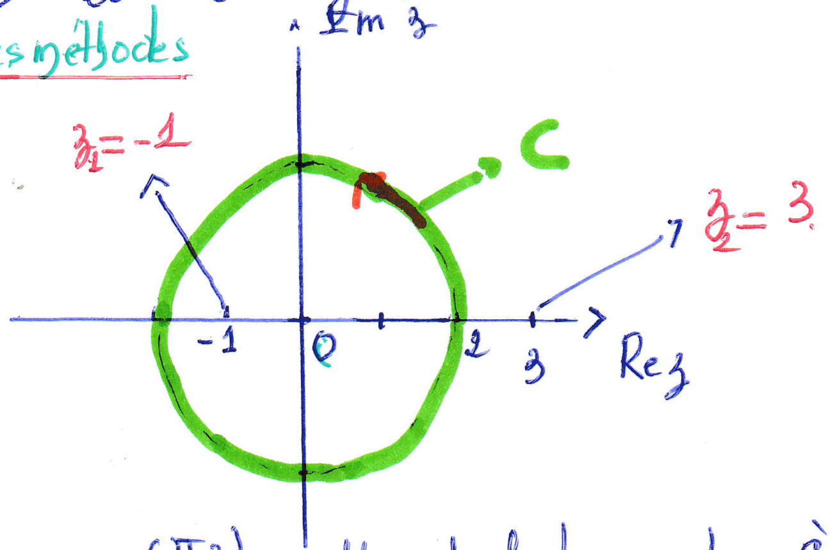


M. Mebkhout

## Exercice n° 2

Calculez $I = \oint_C \frac{\cos(\pi z)}{(z+1)(z-3)} \cdot dz$ où $C$ est le cercle de centre 0 et de rayon 2

**Solution : Une des méthodes**




Posons $f(z) = \frac{\cos(\pi z)}{z-3}$, elle est holomorphe à l'intérieur de $C$ et sur $C$ (car $z_2 = 3 \notin C$)

$z_1 = -1$ est à l'intérieur de $C$.

$$\xrightarrow[\text{CAUCHY}]{\text{Formule intégrale de}} f(-1) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\frac{\cos(\pi z)}{z-3}}{(z-(-1))} \cdot dz$$

$$\Rightarrow I = \oint_C \frac{\cos \pi z}{(z+1)(z-3)} dz = 2\pi i \, f(-1) = 2\pi i \cdot \frac{\cos(-\pi)}{-1-3}$$

$$= 2\pi i \times \frac{-1}{-4} = \frac{\pi i}{2}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi i}{2}$$



M. Mekkhout

## Exercice n°3

Soit $a>1$, évaluer $I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}$

Solution.

Posons $z=e^{i\theta}$

$\Rightarrow z=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$
$\Rightarrow z^{-1}=e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$ $\Big\} \Rightarrow z+z^{-1}=2\cos\theta$

$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2} \quad (1)$$

D'autre part $z=e^{i\theta} \Rightarrow dz=ie^{i\theta}d\theta=iz\cdot d\theta$

$$\Rightarrow d\theta=\frac{dz}{iz} \quad (2)$$

(1) et (2) $\Rightarrow I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}=\int_C\frac{1}{\left(a+\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)iz}\cdot dz$

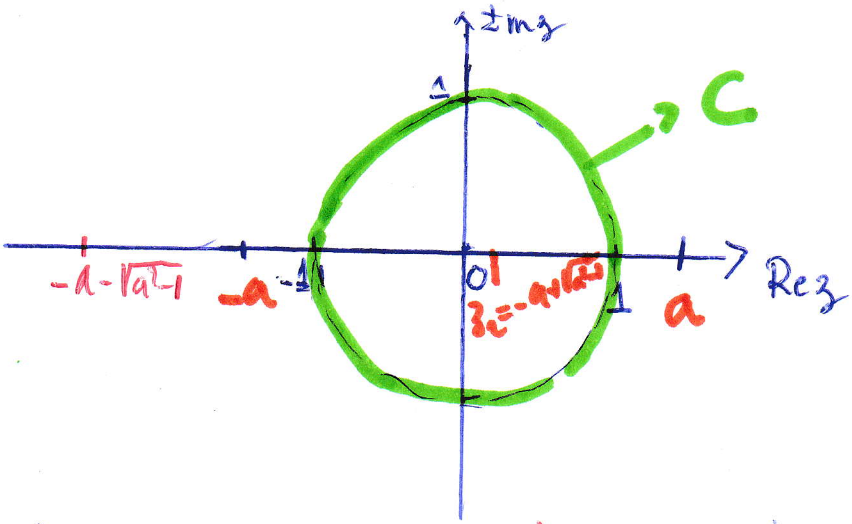
où $C$ est le cercle de centre $0$ et de rayon $1$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{i}\int_C\frac{1}{a+\frac{z^2+1}{2z}\cdot z}\cdot dz=\frac{1}{i}\int_C\frac{2}{z^2+2az+1}\cdot dz$$

Les pôles de $f(z)=\frac{2}{z^2+2az+1}$ sont les racines de $(z^2+2az+1)$ sont $z_1=-a-\sqrt{a^2-1}$ et $z_2=-a+\sqrt{a^2-1}$

seul $z_2$ est à l'intérieur de $C$, en effet.

M. Mebkhout




Il est clair que $\left(-a-\sqrt{a^2-1}\right)$ est à l'exterieur de $C$,
montrons que $\left(\sqrt{a^2-1}-a\right)$ est compris entre $-1$ et $1$.

$$\sqrt{a^2-1}-a=\frac{\left(\sqrt{a^2-1}-a\right)\left(\sqrt{a^2-1}+a\right)}{\sqrt{a^2-1}+a}=\frac{a^2-1-a^2}{\sqrt{a^2-1}+a}=\frac{-1}{\sqrt{a^2-1}+a}<$$

$$\Longrightarrow \left(\sqrt{a^2-1}-a\right)<1.$$

D'autre part :

$$\left(\sqrt{a^2-1}-a\right)+1=\sqrt{a^2-1}-(a-1)=\frac{\left(\sqrt{a^2-1}-(a-1)\right)\left(\sqrt{a^2-1}+(a\right.}{\sqrt{a^2-1}+(a-1)}$$

$$=\frac{a^2-1-(a-1)^2}{\sqrt{a^2-1}+(a-1)}=\frac{a^2-1-a^2+2a-1}{\sqrt{a^2-1}+(a-1)}=\frac{2(a-1)}{\left(\sqrt{a^2-1}+(a-1)\right)}>0 \text{ car } a>$$

$$\Longrightarrow \left(\sqrt{a^2-1}-a\right)+1>0$$

$$\Longrightarrow \left(\sqrt{a^2-1}-a\right)>-1$$

Conclusion :

$$-1<\underbrace{\sqrt{a^2-1}-a}_{z_2}<1 \Longrightarrow z_2 \text{ est à l'intérieur de } C$$

$$\Longrightarrow \operatorname{Res}(f,z_2)=\lim_{z\to z_2}(z-z_2)f(z)=\lim_{z\to\left(-a+\sqrt{a^2-1}\right)}\frac{\left(z-\left(-a+\sqrt{a^2-1}\right)\right.}{z^2+2az+}$$

$$=\lim_{z\to\left(-a+\sqrt{a^2-1}\right)}\frac{2}{z-\left(-a-\sqrt{a^2-1}\right)}=\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$$

M.Mebkhout

théorème des résidus $\Longrightarrow I = \frac{1}{i} 2\pi i \cdot \text{Res}(f, z_2)$

$$\Longrightarrow I = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

Conclusion

Si $a > 1$ $\quad I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

Exercice n° 4

Evaluer $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} \cdot dx$.

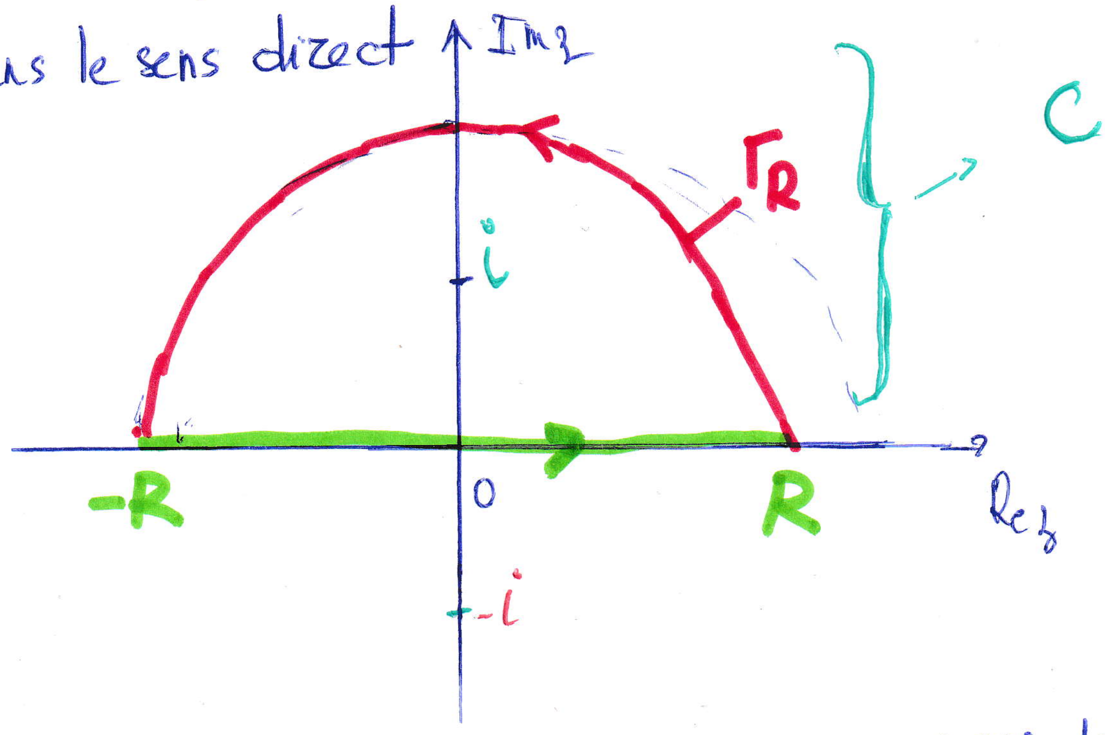
Solution

On fait à l'analyse complexe. en considérant

$J = \oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+1} \cdot dz$. où $C$ désigne le contour fermé

formé par le segment $[-R, R]$ et le demi cercle $\Gamma_R$

décrit dans le sens direct




M. Mebkhout

Les pôles de $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2+1}$ sont $z_1=i$ et $z_2=-1$,

Seul $z_1=i$ est à l'intérieur de C, c'est un pôle simple

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(f,i) = \lim_{z\to i} \frac{(z-i)\,e^{iz}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e^{-1}}{2i}$$

Théorème des résidus $\Rightarrow J = 2\pi i \operatorname{Res}(f,i)$

$$\Rightarrow J = \oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz = 2\pi i \cdot \frac{e^{-1}}{2i} = \pi \cdot e^{-1}$$

D'autre part $J = \int_C \dfrac{e^{iz}}{z^2+1}\cdot dz = \displaystyle\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2+1}\cdot dx + \oint_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)}\cdot dz$

$$\Rightarrow J = \int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx + i\int_{-R}^{R} \frac{\sin x}{x^2+1}\cdot dx + \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{it}}\cdot iRe^{it}}{(Re^{it})^2+1}\cdot dt$$

car la paramétrisation de $\Gamma_R$ est $\gamma(t) = Re^{it}$ $0\leq t\leq \pi$

$$\Rightarrow J = \int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{x^2+1}\cdot dx + \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{it}}\cdot iRe^{it}}{(Re^{it})^2+1}\,dt.$$

Car $\displaystyle\int_{-R}^{R} \frac{\sin x}{x^2+1}\cdot dx = 0$ $\left(\dfrac{\sin x}{x^2+1}\right.$ est impaire et les bornes sont opposées $\left.\right)$

M. Mebkhout

$$\left| \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{it}}}{(Re^{it})^2+1} . iRe^{it} \, dt \right| \leq \int_0^{\pi} \frac{|e^{iRe^{it}}| . |i| . |Re^{it}|}{|R^2 e^{i2t}+1|} \, dt$$

$$\leq \int_0^{\pi} \frac{R}{R^2-1} . dt . \xrightarrow[R \to +\infty]{} 0 .$$

Par conséquent

$$J = \pi e^{-1} = \int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{x^2+1} . dx + \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{it}} . iRe^{it}}{(Re^{it})^2+1} . dt .$$

$R \to +\infty$ $\qquad$ $R \to +\infty$ $\qquad$ $R \to +\infty$

$$\pi e^{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} . dx + 0$$

Comme $\frac{\cos x}{x^2+1}$ est paire . $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} . dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} .$

et donc

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} . dx = \frac{\pi}{2e} .$$



M. Mekkhout