Université de Tlemcen. le 14/04/2024

L2 Mathématiques

Partiel du module "Analyse complexe"

durée : 1h30'

Exercice n° 1 (5,5 pts)

Soit
$$f : \mathbb{C} - \{-i\} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto f(z) = \frac{z-2}{z+i}$$

Determiner l'ensemble $A = \{ z \in \mathbb{C} - \{-i\} / f(z) \in \mathbb{R} \}$

Exercice n° 2 (4 pts)

Déterminer $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^i = i$

Exercice n° 3 (4 pts)

Soit $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :
$$g(x+iy) = x^2 - y^2 - 2ixy + 2x + 2iy.$$

La fonction g est elle holomorphe ?

Exercice n° 4 (6,5 pts)

Soit $z = x+iy$ et u la fonction définie par
$$u(x,y) = 2x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^2 - y$$

1/ Montrer que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

2/ Trouver une fonction v telle que la fonction complexe $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ soit holomorphe

Bon Courage

Université de Tlemcen. le 14/04/2024.
Département de mathématiques
L 2 Mathématiques.
Module : Analyse complexe.

Corrigé du partiel.

Exercice n° 1

Soit $f : \mathbb{C} - \{-i\} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$z \longmapsto f(z) = \frac{z-2}{z+i}$$

Déterminer l'ensemble $A = \{z \in \mathbb{C} - \{-i\} / f(z) \in \mathbb{R}\}$

Solution : Tout d'abord nous allons écrire le complexe sous sa forme algébrique, pour cela posons $z = x + iy$,

pour $z \neq -i$ on a $f(z) = \dfrac{z-2}{z+i} = \dfrac{x+iy-2}{x+iy+i}$

$= \dfrac{(x-2)+iy}{x+i(y+1)}$, en multipliant par le conjugué du dénominateur, on obtient

$$f(z) = \frac{(x-2+iy)(x-i(y+1))}{x^2+(y+1)^2}$$

M. Mebkhout

$$\Rightarrow f(z) = \frac{\quad + i(-(x-2)(y+1) + xy}{x^2+(y+1)^2}.$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im} z = \frac{2y - x + 2}{x^2+(y+1)^2}.$$

$$f(z) \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im} z = 0 \iff 2y - x + 2 = 0.$$

Conclusion $A = \left[\left\{z = x+iy \,/\, y = \frac{1}{2}x - 1\right\} - (0,-1)\right]$

Exercice n° 2

Déterminer $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^i = i$

Solution

on a $z^i = e^{i\log z}$ et $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

on sait que si $w, w' \in \mathbb{C}$ $e^w = e^{w'} \Rightarrow w = w' + 2k\pi i$, c'est à dire l'exponentielle complexe est périodique et de période $2\pi i$ (1)

$$z^i = i \Rightarrow e^{i\log z} = e^{i\frac{\pi}{2}} \overset{(1)}{\Longrightarrow} i\log z = i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i$$

$$\Rightarrow \log z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \operatorname{Ln}|z| + i\operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi + i0 \quad k\in$$

$$\Rightarrow \operatorname{Ln}|z| = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ et } \operatorname{Arg} z = 0, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow |z| = e^{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$$ mais comme $\operatorname{Arg} z = 0$ $z = |z|$

$$\Rightarrow z = e^{\frac{\pi}{2}+2k\pi} \quad k \in \mathbb{Z}$$

N.B.: • Arg z ne peut être égal à 0 que s'il est compris entre $-\pi$ et π car $0 \in]-\pi, \pi[$

• Si par exemple Arg z est compris entre π et 3π, il ne peut pas être égal à 0, donc pas de solutions

N. Mebkhout

Exercice n° 3

Soit $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$g(x+iy) = x^2 - y^2 - 2ixy + 2x + 2iy.$$

la fonction g est elle holomorphe ?

Solution

$$g(x+iy) = x^2 - y^2 + 2x + i(-2xy + 2y).$$

Posons $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2x$ et $v(x,y) = -2xy + 2y$,

les dérivées partielles de u et v sont données par

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x+2 \quad ; \quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = -2x+2.$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -2y \quad , \quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -2y.$$

Remarquons que les conditions de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y}. \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x} \end{cases}$$

Sont satisfaits pour $(x,y) = (0,0)$, par conséquent la fonction g est holomorphe au point $z=0$.

Exercice n° 4

Soit $z = x+iy$ et u la fonction définie par.

$u(x,y)$

1/ Montrer que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

M.Mebkhout

Solution

Tout d'abord il est clair que la fonction u admet des dérivées partielles continues dans $\mathbb{R}^2$, on a donc

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 6x^2-6y^2+2x \; ; \; \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -12xy-2y-1 \quad (1)$$

et $$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = 12x+2 \; ; \; \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = -12x-2$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y^2} = 12x+2-12-2 = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

2/ Trouver une fonction v telle que la fonction complexe $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ soit holomorphe.

Solution:

La fonction f est holomorphe ssi

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}. \quad \text{et} \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}.$$

ainsi $$\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = 6x^2-6y^2+2x. \quad (2)$$

et $$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 12xy+2y+1 \quad (3)$$

d'après (1)

M.Mebkhout

En utilisant (2) et en intégrant par rapport à y.

on aura. $v(x,y) = \int (6x^2 - 6y^2 + 2x)\, dy$.

$\Longrightarrow v(x,y) = 6x^2y - 2y^3 + 2xy + c(x)$. (4)

$\Longrightarrow \dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 12xy + 2y + c'(x)$;

en utilisant (3) on aura

$$12xy + 2y + c'(x) = 12xy + 2y + 1$$

$\Longrightarrow c'(x) = 1 \Longrightarrow c(x) = x + k \quad k \in \mathbb{R}$.

et d'après (4) on obtient

$$v(x,y) = 6x^2y - 2y^3 + 2xy + x + k \quad k \in \mathbb{R}.$$

M. Mebkhout