Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2023/2024

جامعة أبو بكر بلقايد
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

2ème année MATH- Semestre 2

Contrôle continu : Analyse 4

Durée : 1h30mn

L'usage de tout document ou appareil électronique est strictement interdit.

Exercice 1. (4 Pts)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on pose

$$g(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x).$$

Montrer que

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0.$$

Exercice 2. (3 Pts)

Soit f la fonction définie par

$$f(x, y) = \ln(1 + x + y^2).$$

1) Déterminer le domaine de définition D de f.
2) Calculer le gradient de f en $(0, 1)$ et en déduire la différentielle en ce point.
3) Calculer la dérivée directionnelle de f en $(0, 1)$ suivant le vecteur $(2, 1)$.

Exercice 3. (6 Pts)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie en chaque $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \exp\left(\frac{1}{3}x^3 - x - y^2\right).$$

1) Trouver les points critiques de f.
2) Déterminer la nature des points critiques.
3) f admet-elle un extremum global sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 4. (7 Pts)

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2) Étudier l'existence des dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2$.
3) Étudier la continuité des dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2$.
4) En déduire l'ensemble sur lequel f est de classe C^1.
5) Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(x, y) = (x + y, xy)$.
Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, calculer les matrices Jacobiennes de f, g et fog.

Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2023/2024

2ème année M.I - Semestre 2

Corrigé du contrôle continu : Analyse 4

Durée : 1h30mn

Exercice 1. (4 Pts)

On pose

$$u = x - y, \quad v = y - z, \quad w = z - x. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Alors,

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z} \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Ainsi,

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial w} \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = -\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w} \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Donc,

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w} = 0. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Exercice 2. (3 Pts)

On a $f(x, y) = \ln(1 + x + y^2)$.

1) Le domaine de définition de f est

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 1 + x + y^2 > 0\} \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

2) Le gradient de f est

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+x+y^2} \\ \frac{2y}{1+x+y^2} \end{pmatrix} \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Donc,

$$\nabla f(0, 1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

La différentielle en ce point est

$$df(0, 1)(h, k) = \frac{1}{2}h + k. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

3) La dérivée directionnelle de f en $(0, 1)$ en direction de $v = (2, 1)$ est

$$D_{(2,1)}f(0, 1) = 2.\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) + 1.\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 2. \quad (\mathbf{1Pt})$$

Exercice 3. (6 Pts)

On a $f(x,y) = e^{\frac{1}{3}x^3 - x - y^2}$.

1) Les points critiques de f vérifient

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array}\right. \qquad (\mathbf{0.5Pt}) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} (x^2-1)e^{\frac{1}{3}x^3 - x - y^2} = 0 \\ -2ye^{\frac{1}{3}x^3 - x - y^2} = 0. \end{array}\right.$$

Puisque $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $e^{\frac{1}{3}x^3 - x - y^2} > 0$, alors ceci revient au système suivant

$$\left\{\begin{array}{r} x^2 - 1 = 0 \\ -2y = 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x = \pm 1 \\ y = 0. \end{array}\right.$$

Donc, les points critiques de f sont $(1,0)$ et $(-1,0)$. **(0.5 Pt)**

2)La nature des points critiques :

Remarquons que

$$Hess_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

$$= \begin{pmatrix} (x^2-1)e^{\frac{1}{3}x^3 - x - y^2} & -2y(x^2-1)e^{\frac{1}{3}x^3 - x - y^2} \\ -2y(x^2-1)e^{\frac{1}{3}x^3 - x - y^2} & -2e^{\frac{1}{3}x^3 - x - y^2} + 2ye^{\frac{1}{3}x^3 - x - y^2} \end{pmatrix} \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Pour le point $(1,0)$,

$$Hess_f(1,0) = \begin{pmatrix} 2e^{-2/3} & 0 \\ 0 & -2e^{-2/3} \end{pmatrix} \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Puisque $det \quad Hess_f(1,0) < 0$, **(0.5 Pt)**alors $(1,0)$ est un point selle. **(0.25 Pt)**

Pour le point $(-1,0)$, on a

$$Hess_f(1,0) = \begin{pmatrix} -2e^{-2/3} & 0 \\ 0 & -2e^{-2/3} \end{pmatrix} \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Puisque $det \quad Hess_f(-1,0) > 0$, **(0.25 Pt)** et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,0) < 0$, **(0.25 Pt)** alors $(-1,0)$ est un maximum local. **(0.25 Pt)**

3) On peut remarquer que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x,0) = +\infty > f(-1,0) = e^{2/3}.$$

Donc, il n'y a pas de maximum global et puisque les extrema globaux sont à chercher parmis les locaux, alors il n'y a pas de minimum global. **(1.5 Pts)**

Exercice 4. (7 Pts)

1) On remarque que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ puisque f a une expression rationnelle. **(0.25 Pt)**

En $(0,0)$, et par les coordonnées polaires, on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^2+y^2} = \lim_{\forall \theta, r \to 0} \frac{r^4 \cos^4(\theta)}{r^2} = 0. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Donc, f est continue en $(0,0)$ çàd que f est continue sur $\mathbb{R}^2$. **(0.25 Pt)**

2) Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-2xy^4}{(x^2+y^2)^2}, \quad (\mathbf{0.25Pt})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2y^3(2x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}. \quad (\mathbf{0.25Pt})$$

Pour $(x, y) = (0, 0)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{y^4}{y^2} = 0, \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{y - 0} = 0. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

3) On remarque que sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues. $(\mathbf{0.25\ Pt})$
Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2|x|y^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

Par les coordonnées polaires, on obtient

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right| = \lim_{\forall\theta, r\to 0} \frac{r|\cos(\theta)|r^4 \sin^4(\theta)}{r^4} = 0 \quad (\mathbf{1Pt})$$

puisque $|\cos(\theta)|\sin^4(\theta)$ est bornée.
D'autre part, on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2|y|^3(2x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

et par les coordonnées polaires, on obtient que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| = \lim_{\forall\theta, r\to 0} \frac{2r^3|\cos(\theta)|^3(r^2 + r^2\cos^2(\theta))}{r^4}$$

$$= \lim_{\forall\theta, r\to 0} \frac{2r^5|\cos(\theta)|^3(1+\cos^2(\theta))}{r^4} = 0 \quad (\mathbf{1Pt})$$

puisque $|\cos(\theta)|^3(1+\cos^2(\theta))$ est bornée.
Donc, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$. $(\mathbf{0.25\ Pt})$
4) Les deux dérivées partielles premières sont continues sur $\mathbb{R}^2$, donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. $(\mathbf{0.5\ Pt})$
5) On a $g(x,y) = (x+y, xy)$. Alors

$$J_g(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix} \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Aussi, pour f,

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-2xy^4}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-2y^3(2x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Sachant que $J_{fog}(x,y) = J_f(x,y)J_g(x,y)$, alors

$$J_{fog}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-2xy^4}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-2y^3(2x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-2xy^4}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2y^4(2x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-2xy^4}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2y^3x(2x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} \quad (\mathbf{0.5Pt})$$