

Exercice 6. (Facultatif)

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes en précisant le domaine de convergence

$$1) \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + 1}{3^n} x^n, \quad 2) \sum_{n \geq 1} \cos\left(\frac{1}{n}\right) x^n, \quad 3) \sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{\ln(n!)}, \quad 4) \sum_{n \geq 1} \frac{(n!)^k}{(kn!)} x^n, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Exercice 7. (Facultatif)

Trouver le rayon de convergence R , calculer la somme pour tout nombre réel x tel que $|x| < R$ et étudier ce qui se passe si $|x| = R$ pour les séries entières suivantes

$$1) \sum_{n \geq 1} n^2 x^{n-1}, \quad 2) \sum_{n \geq 1} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}, \quad 3) \sum_{n \geq 0} \cosh(n) x^n, \quad 4) \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 - n + 4}{n+1} x^n.$$

Exercice 8. (Facultatif)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) Trouver le rayon de convergence des séries entières suivantes

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\alpha)}{n} x^n \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n\alpha)}{n} x^n.$$

2) Lorsque $|x| < 1$, calculer la somme de

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\alpha)}{n} x^n.$$

3) Montrer que pour $|x| < 1$, on a

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n\alpha)}{n} x^n = \arctan\left(\frac{x \sin(\alpha)}{1 - x \cos(\alpha)}\right).$$

Exercice 9. (Facultatif)

Développer en série entière au voisinage de 0, les fonctions suivantes en précisant le domaine de convergence

$$1) f(x) = \frac{1}{x^2 - 2tx + 1}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad 2) f(x) = \ln(x^2 + x + 1), \quad 3) f(x) = \int_0^x \cos^2(t) dt.$$

Exercice 10. (Facultatif)

Chercher les fonctions y développable en série entière au voisinage de 0 de l'équation différentielle suivante

$$x^2 y'' - x(x+4)y' + 2(x+3)y = 0.$$