Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

جامعة أبو بكر بلقايد
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

Licence 2ème année MATH, 2023–2024

Analyse3
Fiche de TD 2 : Les séries de fonctions.

Exercice 1. Déterminer le domaine de convergence simple des séries de fonctions $\sum u_n(x)$ définies par

1) $u_n(x) = \dfrac{1}{1+n^2x}$,

2) $\begin{cases} u_1(x) = x \\ u_n(x) = x(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}), \end{cases}$,

3) $u_n(x) = ne^{-nx}$,

4) $u_n(x) = \left(\dfrac{x(x+n)}{n}\right)^n$.

Exercice 2. Etudier la convergence normale, uniforme et simple des séries de fonctions suivantes

1) $\sum \dfrac{x}{(1+x^2)^n}, \quad x \in \mathbb{R}^+$,

2) $\sum \dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}+\cos(x)}, \quad x \in \mathbb{R}$,

3) $\sum x^\alpha e^{-nx}, \quad x \geq 0, \quad \alpha > 0$,

4) $\sum \dfrac{(x\ln(x))^n}{n!}, x \in]0,1[$.

Exercice 3. Soit la série de fonctions de terme général

$$u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2+x^2}.$$

1) Trouver le domaine D de convergence de la série $\sum u_n(x)$.
2) Montrer que la série $\sum u_n(x)$ converge uniformément sur D.
3) En déduire que la somme $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est continue sur D.
4) Montrer que la somme $S(x)$ est dérivable sur $[a, +\infty[$, pour tout $a > 0$.

Exercice 4. On considère la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ avec

$$u_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x = 0, \\ \frac{x^n \ln(x)}{n} & \text{si } \ x > 0, \end{cases}$$

1) Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ converge normalement sur $[0,1]$ et en déduire que

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\right) = -\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)^2}.$$

2) Sachant que $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$, calculer la somme de $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n(n+1)^2}$.

Exercice 5. (Facultatif)

Etudier la convergence normale, uniforme et simple des séries de fonctions suivantes

$$1) \sum \frac{1}{n^x}, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad 2) \sum \frac{\sin(nx)}{n^2+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 3) \sum \frac{(-1)^n}{nx+(-1)^n}, \quad x \in]2,+\infty[.$$

Exercice 6. (Facultatif)

Soit la série de fonction de terme général suivant

$$u_n(x) = (\alpha e^{-\alpha n x} - \beta e^{-\beta n x}), \quad \alpha, \beta > 0 \quad \text{et} \quad \alpha \neq \beta.$$

1) Etudier la convergence simple de la série $\sum u_n(x)$.

2) Calculer sa somme $S(x)$.

Exercice 7. (Facultatif)

1) Montrer que la série de fonctions

$$\sum \frac{1}{(1+nx)(nx)}$$

converge simplement sur $]0,+\infty[$ et converge normalement sur $[a,+\infty[$ pour $a > 0$ fixé.

2) Montrer que sa somme $S(x)$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Exercice 8. (Facultatif)

Soit la série de fonctions

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \sin(nx)}{n}.$$

1) Montrer que f est de classe C^1 sur $]-1,+1[$.
2) Calculer $f'(x)$ et en déduire que

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x\sin(x)}{1-x\cos(x)}\right).$$

3) Calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin(n)}{n}.$$