Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

جامعة أبو بكر بلقايد
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

Licence 2ème année MATH, 2023–2024

ANALYSE3

Fiche de TD 1 : Les séries numériques.

Exercice 1. Trouver la somme (S_n) des n premiers termes de la série, puis calculer la somme S pour chacune des séries suivantes

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+\alpha)(n+\alpha+1)}, \alpha > 0$

2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{e^{-n}(\pi\alpha)^n}, \alpha > 1$

3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n + \sqrt{n+1} - 3\sqrt{n}}{3^{n+1}},$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right)$

Exercice 2. Etudier la nature des séries numériques suivantes

1) $\displaystyle\sum \frac{\sqrt{n+1}}{3^n+1},$ 2) $\displaystyle\sum \frac{n(n+1)(n+2)..(2n)}{(2n)^n},$ 3) $\displaystyle\sum \left(\frac{2n+1}{5n+2}\right)^{n^2},$

4) $\displaystyle\sum \frac{a^n}{n^\alpha}, \quad a > 0, \alpha \in \mathbb{R},$ 5) $\displaystyle\sum \frac{n^n}{e^n n!},$ 6) $\displaystyle\sum (1-\cos(\frac{1}{n}))\sqrt{\ln(n)},$

7) $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2 \ln^3(n)},$ 8) $\displaystyle\sum \frac{1}{n(n+\ln(n))},$ 9) $\displaystyle\sum \frac{e^{-2n}+\sqrt{n}}{n^2+1}.$

Exercice 3. 1) Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles avec $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq 0, v_n \geq 0$
On suppose que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes. Quelle est la nature de la série $\sum \sqrt{u_n v_n}$?

2) Soit $(u_n)_n$ une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq 0$. On pose

$$v_n = \frac{1}{1+n^2 u_n}.$$

Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont divergentes.

Exercice 4. Etudier la nature des séries numériques suivantes

1) $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n^2+(-1)^n}, k \in \mathbb{R},$ 2) $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n e^{-n}}{n(1+n^2)},$ 3) $\displaystyle\sum \left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n,$

4) $\displaystyle\sum \sin\left(\pi\left(\frac{n^2+n+1}{n+1}\right)\right),$ 5) $\displaystyle\sum \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\sin(n).$

Exercice 5. Suivant les valeurs du paramètre a, étudier la convergence de la série

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n \left(\frac{a}{a-1}\right)^n.$$

Exercice 6. (Facultatif) Trouver les réels a, b et c telle que la série de terme général $\ln(n) + b\ln(n+1) + c\ln(n+2)$ converge et calculer sa somme.

Exercice 7. (Facultatif)On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}.$$

1) Donner la nature de la série de terme général $v_n = \ln(\frac{u_{n+1}}{u_n})$.
2) En déduire l'existence d'un entier $k > 0$ tel que

$$n! \sim_\infty k n^n e^{-n}\sqrt{n}.$$

Exercice 8. (Facultatif)Etudier la nature des séries numériques suivantes

$$1) \sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \qquad 2) \sum \frac{1}{\ln(n^2+n+1)}, \qquad 3) \sum \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}},$$
$$4) \sum \frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}}), \qquad 5) \sum e^{-\sqrt{2+n}}, \qquad 6) \sum \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}},$$
$$7) \sum \left(\frac{4n+1}{3n+2}\right)^n, \qquad 8) \sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}, \qquad 9) \sum \frac{2^n}{cosh(n)}.$$

Exercice 9. (Facultatif)Etudier la nature des séries numériques suivantes

$$1) \sum \frac{(-1)^n}{n}\arctan(\frac{1}{n}), \qquad 2) \sum \frac{(-1)^n}{n+2\sin(n)},$$
$$3) \sum \frac{\sin(2n)}{n^2-n+1}, \qquad 4) \sum \sin(2\pi\sqrt{n^2+(-1)^n}).$$

Exercice 10. (Facultatif)Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ avec

$$u_n = \ln(\cos(\frac{1}{2^n}))$$

est convergente et calculer sa somme.

Exercice 11. (Facultatif)1) Montrer que la série de terme général

$$u_n = n^{-1} + \ln(n) - \ln(n+1)$$

est convergente.
2) En déduire que la suite

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln(n)$$

admet une limite l. (Cette limite s'appelle la constante d'Euler).