Université Aboubekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
L2 - Maths

AU : 2023/2024
Durée: 1h30mn

Rattrapage d'Analyse Numérique 1

EXERCICE 1 : **(8 pts)** Soit la fonction $f(x) = x \ \exp(x^2)$.

L'équation $f(x) = 0$ possède la racine $a = 0$, que l'on cherche à retrouver en utilisant la méthode de Newton.

1. Ecrire le processus itératif de Newton pour cette équation.
2. Ce processus converge t-il vers la racine $a = 0$ s'il est initialisé par $x^{(0)} = 2$.
3. Déterminer un intervalle où ce processus doit être initialisé pour qu'il converge vers la racine $a = 0$.
4. Donner les approximations de la solution avec 6 chiffres après la virgule.

EXERCICE 2 **(06pts)** Considérons le tableau des valeurs suivant :

I	0	1	2	3	4
x_i	-1	0	1	2	3
y_i	3	2	3	6	11

Avec $y_i = f(x_i); i = 0, \dots, 4$. Où f(x) est une fonction inconnue.

1. Calculer en utilisant la formule des trapèzes généralisée : $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.
2. En utilisant la formule de Simpson généralisée, calculer : $\int_{-1}^{3} F(x)dx$

5. Avec, $F(x) = f(x) * (x^2 + 1)$, où $f(x)$ est la fonction dont ses valeurs sont données dans le tableau précédent. * : multiplication.

EXERCICE 3 **(06pts)**

Soient $f(x) = \sin(\pi x)$ et les points $x_0 = -1$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$ et $x_3 = \frac{3}{2}$.

Parmi les polynomes suivants, quel est celui qui interpole f aux points x_0, x_1, x_2 et x_3

Où, $P_1(x) = x^3\text{-}2x^2\text{+}1$, $P_2(x) = x^4\text{-}1$ et $P_3(x) = \frac{8}{5}\left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{1}{3}x + 1\right)$.

-Bonne chance -

Corrigé Rattrapage
Analyse numérique 1

Exercice 1 : $f(x) = x \exp(x^2)$

(1) Le processus itératif de Newton :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \; ; \; n = 0, 1, \dots \quad 01$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n e^{x_n^2}}{(2x_n^2+1) e^{x_n^2}} \quad 01$$

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3}{2x_n^2+1} \; ; \quad n = 0, 1, \dots$$

(2) $f(x) = x e^{x^2}$; $f'(x) = (2x^2+1) e^{x^2}$ 0,5

$f''(x) = 2x(2x^2+3) e^{x^2}$ 0,5

$x_0 = 2$ doit vérifier : $f(2) f''(2) > 0$ 0,5

$f(2) \times f''(2) = 88 e^8 > 0$ 0,5

Si $x_0 = 2$ le processus itératif de Newton converge.

(3) * f continue sur $]-1, 2[$ 0,5

* f strictement monotone sur $]-1, 2[$ 0,5

* $\left.\begin{array}{l} f(-1) = -e \\ f(2) = 2e^4 \end{array}\right) \Rightarrow f(-1) \times f(2) < 0$ 0,5

* $x_0 = 2$ vérifie $f(2) \times f''(2) > 0$ 0,5

Alors, le processus itératif de Newton converge.

4 Les approximations de la solution :

$x_0 = 2$

$x_1 = 1,7777777$

$x_2 = 1,5349446$

$x_3 = 1,2662269$

$x_4 = 0,9652219$

$x_5 = 0,6281215$

$x_6 = 0,2770338$

$x_7 = 0,0368648$

$x_8 = 9,99 \times 10^{-5}$ 0,2

$x_9 = 1,99 \times 10^{-12}$

$x_{10} = 1,58 \times 10^{-35}$

Exercice 2

* Formule des trapèzes généralisée :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left(y_0 + 2y_1 + y_2\right)$$ 0,1

$$= \frac{1}{2}\left(3 + 2\times 2 + 3\right)$$

$$= 5$$ 0,75

* Formule de Simpson généralisée :

Posons : $F_i = F(x_i)$; $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

0,5 $F_0 = F(-1) = 6$

0,5 $F_1 = F(0) = 2$

0,5 $F_2 = F(1) = 6$

0,5 $F_3 = F(2) = 30$

0,5 $F_4 = F(3) = 110$

$$\int_{-1}^{3} F(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(F_0 + 4F_1 + 2F_2 + 4F_3 + F_4\right)$$ 0,1

$$= \frac{1}{3}\left(6 + 4\times 2 + 2\times 6 + 4\times 30 + 110\right)$$

$$= \frac{256}{3}$$ 0,75

$$= 85,33$$

Exercice 3

Soit $f(x) = \sin(\pi x)$

$f(-1) = 0$; $f(\frac{1}{2}) = 1$; $f(1) = 0$; $f(\frac{3}{2}) = -1$.

01 $P_1(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 + 1 = -2 \neq f(-1) = 0$

P_1 ne convient pas.

01 $P_2(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^4 - 1 \neq f(\frac{1}{2}) = 1$

P_2 ne convient pas.

01 $P_3(-1) = \frac{8}{5}\left[\frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2 - \frac{1}{3}(-1) + 1\right]$

$= \frac{8}{5}\left(-\frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3} + 1\right) = 0 = f(-1)$

01 $P_3(\frac{1}{2}) = \frac{8}{5}\left[\frac{1}{3}(\frac{1}{2})^3 - (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{3}(\frac{1}{2}) + 1\right]$

$= \frac{8}{5}\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + 1\right)$.

$= \frac{8}{5} \times \frac{15}{24} = 1 = f(\frac{1}{2})$

01 $P_3(1) = \frac{8}{5}\left(\frac{1}{3} - 1 - \frac{1}{3} + 1\right) = 0 = f(1)$

01 $P_3(\frac{3}{2}) = \frac{8}{5}\left[\frac{1}{3}(\frac{3}{2})^3 - (\frac{3}{2})^2 - \frac{1}{3} \times (\frac{3}{2}) + 1\right]$

$= \frac{8}{5}\left(\frac{27}{24} - \frac{9}{4} - \frac{3}{6} + 1\right)$

$= \frac{8}{5} \times \frac{-15}{24} = -1 = f(\frac{3}{2})$

Alors, P_3 est le polynôme d'interpolation de f aux points x_0, x_1, x_2 et x_3.