Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2023/2024

2ème année MATH- Semestre 1

Examen de rattrapage : Analyse 3

Durée : 1h30mn

L'usage de tout document ou appareil électronique est strictement interdit.

Exercice 1. (5 Pts)

Étudier la nature des séries numériques suivantes

$$1)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)^{2n}}{(2n)!},\qquad\qquad 2)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{exp(-\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$$

Exercice 2. (5 Pts)

Soit la série de fonction de terme général

$$u_n(x)=\frac{x}{n(1+nx^2)},\qquad n\geq 1,\quad x\geq 0.$$

1) Montrer que $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge normalement sur $[0,+\infty[$.

2) On note S la fonction somme de la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$.

Montrer que S est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

3) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} S(x)=0$.

Exercice 3. (6 Pts)

Soit la série entière suivante

$$f(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n+4}}{2^n(n+1)(n+3)}.$$

1) Déterminer le rayon de convergence R.

2) En déduire le domaine de convergence D_f.

3) Pour $x\in D_f$, calculer la somme de la série entière f.

4) En déduire la somme de la série numérique

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Exercice 4. (4 Pts)

Soit la fonction f_1, $2\pi-$périodique définie sur $]-\pi,\pi]$ par

$$f_1(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in]-\pi,-\frac{\pi}{2}]\\ 0 & \text{si } x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\\ 1 & \text{si } x\in[\frac{\pi}{2},\pi]\end{cases}$$

1) Déterminer la série de Fourier associée à f_1.

2) Soit f_2 la fonction $2\pi-$périodique définie par

$$f_2(x)=-\frac{x}{2}+\int_0^x f_1(t)dt.$$

En déduire la série de Fourier associée à f_2.

Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2023/2024

جامعة أبو بكر بلقايد
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

$2^{ème}$ année MATH - Semestre 1

Corrigé de l'examen de rattrapage : Analyse 3

Durée : 1h30mn

Exercice 1. (5 Pts)

1) On a $\sum \frac{(n+1)^{2n}}{(2n)!}$. Appliquons le critère de d'Alembert.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)^{2n+2}}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{(n+1)^{2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)^{2n+2}}{(n+1)^{2n}}\frac{1}{(2n+2)(2n+1)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)^{2n+2}}{2(n+1)^{2n+1}}\frac{(n+2)}{(2n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n+2}\frac{(n+1)}{2(2n+1)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2n+2}\frac{(n+1)}{2(2n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)}\right]^2\frac{(n+1)}{2(2n+1)}$$

$$= \frac{e^2}{4} > 1,$$

donc la série diverge. **(2.5 Pts)**

2) Pour $\sum \frac{exp(-\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$, on remarque que

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} n^{3/2}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} = 0.$$

Donc, pour n assez grand,

$$n^2\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} \leq 1.$$

Ainsi,

$$\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Puisque $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, alors par le critère de comparaison, la série $\sum \frac{exp(-\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$ converge. **(2.5 Pts)**

Exercice 2. (5 Pts)

On a pour $x \geq 0$, $\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$.

On remarque que

$$u'_n(x) = \frac{n(1+nx^2) - 2n^2x^2}{n^2(1+nx^2)^2)}.$$

Alors, $u'_n(x) = 0 \Leftrightarrow n - n^2x^2 = 0 \Leftrightarrow n(1-nx^2) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{n}}$.
De plus, $u_n(0) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$. Donc,

$$\sup_{x\geq 0} u_n(x) = u_n(\frac{1}{\sqrt{n}}) = \frac{1}{2n^{3/2}}.$$

Puisque $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (série de Riemann), alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$ converge normalment sur $[0,+\infty[$. **(2 Pts)**

2) Montrons que S est de classe C^1 sur tout intervalle $[a,b] \subset]0,+\infty[$. Il suffit de montrer que $\sum u_n'(x)$ converge uniformément sur tout $[a,b]$.

On a

$$u_n'(x) = \frac{1}{n(1+nx^2)^2} - \frac{x^2}{n(1+nx^2)^2}.$$

D'autre part, pour $x \in [a,b]$, on a

$$\frac{1}{n(1+nx^2)^2} \leq \frac{1}{n(1+na^2)^2}$$

et

$$\frac{x^2}{n(1+nx^2)^2} \leq \frac{b^2}{(1+na^2)^2}.$$

Donc,

$$\sup_{x\geq 0} u_n'(x) = \frac{1}{n(1+na^2)^2} + \frac{b^2}{(1+na^2)^2}.$$

Puisque $\sum \frac{1}{n(1+na^2)^2}$ et $\sum \frac{b^2}{(1+na^2)^2}$ convergent, alors $\sum u_n'(x)$ converge normalement, donc uniformément sur $[a,b]$. Ainsi, S est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. **(2 Pts)**

3) On a $\forall x > 0$, $u_n(x) \leq \frac{x}{n^2x^2} = \frac{1}{n^2x^2}$. Donc,

$$S(x) \leq \frac{1}{x}\sum \frac{1}{n^2}.$$

Puisque $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, alors $\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0$. **(1 Pt)**

Exercice 3. (6 Pts)

On a $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+4}}{2^n(n+1)(n+3)}$.

1) Le rayon de convergence R :

Appliquons le critère de d'Alembert

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{x^{2n+6}}{2^{n+1}(n+2)(n+4)} . \frac{2^n(n+1)(n+3)}{x^{2n+4}} \right| = \frac{x^2}{2}.$$

Si $\frac{x^2}{2} < 1 \Leftrightarrow x^2 < 2 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{2}$, alors la série entière converge, donc $R = \sqrt{2}$. **(1 Pt)**

2) Pour $x = +\sqrt{2}$, on a la série numérique suivante $\sum \frac{(\sqrt{2})^{2n}(\sqrt{2})^4}{2^n(n+1)(n+3)} = \sum \frac{4}{(n+1)(n+3)}$ qui converge. **(0.5 Pt)**

Même chose pour $x = -\sqrt{2}$. **(0.25 Pt)** Donc,le domaine de convergence est $D_f = [-\sqrt{2}, +\sqrt{2}]$. **(0.25 Pt)**

3) La somme de f :

On remarque que pour $x \neq 0$, on a $f(0) = 0$. **(0.25 Pt)**

Pour $x \in D_f \setminus \{0\}$, on a

$$\frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right).$$

Donc,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+4}}{2^{n+1}(n+1)} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+4}}{2^{n+1}(n+3)}$$

$$= x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\frac{x^2}{2})^{2n+1}}{(n+1)} - \frac{4}{x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^{n+3}}{2^{n+3}(n+3)}$$

$$= x^2 \ln(1 - \frac{x^2}{2}) - \frac{4}{x^2} \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(\frac{x^2}{2})^n}{(n)}$$

$$= x^2 \ln(1 - \frac{x^2}{2}) - \frac{4}{x^2} \left(\ln(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} \right)^2) \right)$$

$$= \left(x^2 - \frac{4}{x^2} \right) \ln(1 - \frac{x^2}{2}) + 2 + \frac{x^2}{2}. \quad (\mathbf{3Pts})$$

4) Pour $x = \sqrt{2}$, on a

$$4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)} = 3,$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{7}{12}. \quad (\mathbf{0.75Pt})$$

Exercice 4. (4 Pts)

1) Nous remarquons que f est paire, donc $b_n = 0$, $\forall n \geq 1$. $\quad (\mathbf{0.5\ Pt})$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} dx = \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} dx = 1, \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

et pour $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(nx) dx = \frac{2}{n\pi} \left[\sin(nx) \right]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= -\frac{2}{n\pi} \sin(n\frac{\pi}{2}). \quad (\mathbf{1Pt})$$

Donc,

$$a_{2m} = 0, \quad \text{et} \quad a_{2m-1} = \frac{2(-1)^m}{\pi(2m-1)}. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Ainsi, la série de Fourier associée à f est

$$S_f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m-1)} \cos((2m-1)x). \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

2) On a $f_2(x) = -\frac{x}{2} + \int_0^x f_1(t) dt$. Donc,

$$f_2(x) = -\frac{x}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m-1)^2} \left[\sin((2m-1)t) \right]_0^x$$

$$\Rightarrow f_2(x) = -\frac{x}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m-1)^2} \sin((2m-1)x). \quad (\mathbf{1Pt})$$