Université de Tlemcen — le 11/06/2024

Département de mathématiques

L2 Mathématiques

Module : Topologie

Épreuve de rattrapage — durée : 1H30

Exercice n° 1

Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application.

1/ Montrer que si f est continue alors $\left[\forall A \subset Y \quad f^{-1}(\mathring{A}) \subset \widehat{f^{-1}(A)}^{\circ}\right]$

2/ Montrer que si f est continue alors $\left[\forall A \subset Y \quad \overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\overline{A})\right]$

Exercice n° 2

Soit (E,d) un espace métrique.

Montrer que si $e(x,y) = \mathrm{Min}(1, d(x,y))$ alors (E,e) est un espace métriq

Exercice n° 3

Soit d la distance définie sur $\mathbb{R}^+$ par $d(x,y) = |x-y|$

et l'application
$$f : (\mathbb{R}^+, d) \longrightarrow ([0,1], d)$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{x}{x+1}$$

Montrer que f est continue et bijective

Exercice n° 4

Soit (X, τ_X) un espace topologique avec $X = \{a,b,c,d\}$ et $\tau_X = \{\phi, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,$

et (Y, τ_Y) un espace topologique avec $Y = \{x,y,z\}$ et $\tau_Y = \{\phi, Y, \{x\}, \{y,z\}\}$

l'application $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ définie par : $f(a) = x$, $f(b) = y$, $f(c) = z$, $f(d) =$

1/ f est-elle continue aux points a, b, c, d ?

2/ f est-elle ouverte ?

Exercice n° 1 : 5 pts ; Exercice n° 2 : 5 pts ; Exercice n° 3 : 5 pts ; Exercice n° 4 : 5 pts

Bon courage et bonnes vacances

Corrigé de l'épreuve de rattrapage

Exercice n° 1

Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application.

1/ Montrer que si f est continue alors :

$$\left[\forall A \subset Y \quad f^{-1}(\mathring{A}) \subset \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(A)}}\right]$$

Solution

$$A \subset Y \xRightarrow{\text{def de } \mathring{A}} \mathring{A} \subset A \Longrightarrow f^{-1}(\mathring{A}) \subset f^{-1}(A) \longrightarrow ①$$

$$\mathring{A} \text{ est un ouvert de } Y \xRightarrow[\text{f continue}]{\text{Hypothèse}} f^{-1}(\mathring{A}) \text{ ouvert de } X \longrightarrow ②$$

① et ② $\Longrightarrow f^{-1}(\mathring{A})$ est un ouvert de X, inclu dans $f^{-1}(A)$

or $\overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(A)}}$ est le plus grand ouvert inclu dans $f^{-1}(A)$

par conséquent $f^{-1}(\mathring{A}) \subset \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(A)}}$

2/ Montrer que si f est continue alors

$$\left[\forall A \subset Y \quad \overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\bar{A})\right]$$

Solution

$$A \subset Y \xRightarrow{\text{def de } \bar{A}} A \subset \bar{A} \Longrightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(\bar{A}) \longrightarrow ③$$

M. Mebkhout

$\bar{A}$ est un fermé de Y $\xrightarrow{\text{Hypothèse}}$ $f^{-1}(\bar{A})$ est un fermé de X → ④

f continue.

③ + ④ $f^{-1}(\bar{A})$ est un fermé contenant $f^{-1}(A)$.

or $\overline{f^{-1}(A)}$ est le plus petit fermé contenant $f^{-1}(A)$

par conséquent $\overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\bar{A})$.

Exercice n° ②

Soit (E,d) un espace métrique.

Montrer que si $e(x,y) = \mathrm{Min}(1, d(x,y))$ alors (E,e) est un espace métrique.

Solution: $x, y \in E$

- $e(x,y) = \mathrm{Min}(1, d(x,y)) \Longrightarrow e(x,y) \geq 0$ car $d(x,y) \geq 0$
- $e(x,y) = \mathrm{Min}(1, d(x,y)) = \mathrm{Min}(1, d(y,x)) = d(y,x)$.
- $e(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Min}(1, d(x,y)) = 0 \Longleftrightarrow d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x =$
- Soit $x, y, z \in E$ et montrons que :

$$e(x,z) \leq e(x,y) + e(y,z). \quad ①$$

tout d'abord remarquons que $e(x,z) \leq 1 \quad \forall x, z \in E$

car $e(x,z) = \mathrm{Min}(1, d(x,z))$

- si $e(x,y) = 1$ ou $e(y,z) = 1$ ①

car $e(x,z) \leq 1 \Rightarrow e(x,z) \leq 1 + e(y,z)$

$\Rightarrow e(x,z) \leq e(x,y) + e(y,z)$ ou $e(x,z) \leq e(x,y) + 1$

ce qui implique que $e(x,z) \leq e(x,y) + e(y,z)$.

 M. Mekkhout

- Si $e(x,y) < 1$ et $e(y,z) < 1$ on a :

$e(x,y) = d(x,y)$ et $e(y,z) = d(y,z)$

$\Rightarrow e(x,z) \leq d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) = e(x,y) + e(y,z)$

$\Rightarrow e(x,z) \leq e(x,y) + e(y,z) \Rightarrow$ (1) est vérifiée

Conclusion : (E,e) est un espace métrique

Exercice n° 3

Soit d la distance définie sur $\mathbb{R}^+$ par $d(x,y) = |x-y|$ et l'application

$$f : (\mathbb{R}^+, d) \longrightarrow ([0,1[, d)$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{x}{x+1}.$$

Montrer que f est continue et bijective.

Solution :

f continue :

Soit $x, y \in E$

$$d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = \left| \frac{x}{x+1} - \frac{y}{y+1} \right|$$

$$= \left| \frac{x(y+1) - y(x+1)}{(x+1)(y+1)} \right| = \frac{|x-y|}{|x+1||y+1|}$$

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \Rightarrow x+1 \geq 1 \\ y \geq 0 \Rightarrow y+1 \geq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow |x+1||y+1| \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{|x+1||y+1|} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{|x-y|}{|x+1||y+1|} \leq |x-y|.$$

$\Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq d(x,y)$

$\Rightarrow f$ est 1 Lipschitzienne $\Rightarrow f$ est uniformément continue

$\Rightarrow f$ est continue.

M. Mekkhout

f bijective :

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [0,1[$$
$$x \longmapsto y = f(x) = \frac{x}{x+1}$$

$$y = \frac{x}{x+1} \Rightarrow y(x+1) = x$$

$$\Rightarrow yx + y = x$$
$$\Rightarrow x(1-y) = y$$
$$\Rightarrow x = \frac{y}{1-y}$$

Comme $y \in [0,1[$ on a $y < 1 \Rightarrow 1-y > 0$.

$\Rightarrow 1-y \neq 0$.

Par conséquent.

$$\forall y \in [0,1[\quad \exists!\ x = \frac{y}{1-y} \in \mathbb{R}^+ / y = \frac{x}{x+1} = f(x)$$

(1 seul)

$\Rightarrow f$ est bijective.

M.Mebkhout

Exercice n° 4

Soit (X, τ_X) un espace topologique avec $X = \{a, b, c, d\}$
et $\tau_X = \{\phi, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,b,$

et (Y, τ_Y) un espace topologique avec $Y = \{x, y, z\}$
et $\tau_Y = \{\phi, Y, \{x\}, \{y, z\}\}$

et l'application $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ définie par
$f(a) = x$, $f(b) = y$, $f(c) = z$, $f(d) = z$.

1/ f est elle continue aux points a, b, c, d ?

Solution

Continuité de f au point a.

f est continue au point a si :
$\forall$ V voisinage de $f(a) = x$ $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a

Les voisinages de x sont Y et $\{x\}$.

- $f^{-1}(Y) = X$ car f est une application.
  X est un voisinage de a car il contient un ouvert $\{a\}$ qui contient a.
- $f^{-1}(\{x\}) = \{t \in X / f(t) \in \{x\}\} = \{t \in X / f(t) = x\} = \{a\}$
  $\{a\}$ est un voisinage de a car il contient un ouvert $\{a\}$ qui contient a.

  Par conséquent f est continue au point a.

Continuité au pt b.

Les voisinages de $f(b) = y$ sont Y et $\{y, z\}$

- $f^{-1}(\{y,z\}) = \{t \in X / f(t) \in \{y, z\}\} = \{b, c, d\}$
  car $f(b) = y$, $f(c) = z$, $f(d) = z$

mais $\{b, c, d\}$ n'est pas un voisinage de b
car il ne contient pas un ouvert qui contient b

M. Mebkhout

Par conséquent f n'est pas continue au pt b.
Et en utilisant la même méthode on montre que f n'est pas continue en c et en d.

2/ f est elle ouverte ?
$\{a, b\}$ est un ouvert de X mais $f(\{a, b\}) = \{f(a), f(b)\} = \{x, y\}$ n'est pas un ouvert de Y, par conséquent f n'est pas ouverte.

M. Mebkhout