Université de Tlemcen. le 17/01/2024.

Département de mathématiques

L2 Mathématiques

Module : Topologie.

EPREUVE FINALE

durée : $1^h 45'$

Exercice n° 1

Soit $X=\{a,b,c\}$ muni d'une topologie τ.

Montrer que si les singletons $\{a\},\{b\},\{c\}$ appartiennent à τ, alors τ est la topologie discrète.

Exercice n° 2

Soit X un espace topologique, $A\subset X$

Montrer que $\mathring{A}\cap F_r(A)=\phi$ et $F_r(A)=F_r(\complement A)$

Exercice n° 3

Soient X et Y deux espaces topologiques, Y séparé.

$f:X\to Y$ et $g:X\to Y$ deux applications continues

Montrer que $A=\{x\in X/ f(x)\neq g(x)\}$ est un ouvert de X.

Exercice n° 4

Soit E un ensemble, d et e deux distances sur E telles que :

$d(x,y)\leq k\,e(x,y)$ et $e(x,y)\leq l\,d(x,y)$; $x\in E, y\in E$; $k>0$, $l>0$.

Montrer que (E,d) complet $\Longrightarrow (E,e)$ complet.

Exercice n° 5

Soit E un espace topologique compact $F\subset E$.

Montrer que si F est fermé alors F est compact.

Exercice n° 1 : 3,5pts ; Exercice n° 2 : 3,5pts ; Exercice n° 3 : 4pts ; Exercice n° 4 : 4pts

Exercice n° 5 : 5pts

Bon Courage

Université de Tlemcen. le 17/01/2024.
Département de mathématiques
L2 Mathématiques
Module : Topologie.

EPREUVE FINALE

durée : $1^h45'$

Exercice n° 1

Soit $X=\{a,b,c\}$ muni d'une topologie τ.
Montrer que si les singletons $\{a\},\{b\},\{c\}$ appartiennent à τ, alors τ est la topologie discrète. 3pts

Exercice n° 2

Soit X un espace topologique, $A\subset X$
Montrer que $\mathring{A}\cap F_r(A)=\phi$ et $F_r(A)=F_r(\complement A)$
1,5pts 2pts

Exercice n° 3

Soient X et Y deux espaces topologiques, Y séparé.
$f:X\longrightarrow Y$ et $g:X\longrightarrow Y$ deux applications continues.
Montrer que $A=\{x\in X/f(x)\neq g(x)\}$ est un ouvert de X.
4pts

Exercice n° 4

Soit E un ensemble, d et e deux distances sur E telles que :
$d(x,y)\leq k\,e(x,y)$ et $e(x,y)\leq l\,d(x,y)$; $x\in E, y\in E$; $k>0$, $l>0$.
Montrer que (E,d) complet $\Longrightarrow (E,e)$ complet. (x_n) converge ds (E,d) 2pts

(x_n) converge ds (E,e) 2pts

Exercice n° 5

Soit E un espace topologique compact $F\subset E$.
Montrer que si F est fermé alors F est compact. 5pts

Exercice n° 1 : 3,5pts ; Exercice n° 2 : 3,5pts ; Exercice n° 3 : 4pts ; Exercice n° 4 : 4pts
Exercice n° 5 : 5pts

Bon Courage

Université de Tlemcen.
Département de mathématiques.
L2 Mathématiques.
Module : Topologie.

Corrigé de l'épreuve finale.
du · 17/01/2024.

Exercice n° ①

Soit $X = \{a, b, c\}$ muni d'une topologie τ.
Montrer que si les singletons $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ appartiennent à τ alors τ est la topologie discrète.

Solution

Par hypothèse τ est une topologie sur $X = \{a, b, c\}$

$\Longrightarrow$ • $\phi \in \tau, X \in \tau$.

• Toute réunion d'éléments de τ est un élément de τ.

$\Longrightarrow \{a, b\} = \{a\} \cup \{b\} \in \tau$, $\{a, c\} = \{a\} \cup \{c\} \in \tau$.
$\{b, c\} = \{b\} \cup \{c\} \in \tau$. car $\{a\} \in \tau$, $\{b\} \in \tau$, $\{c\} \in \tau$.

Conclusion

$$\tau = \{\phi, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

$\Longrightarrow$ Toutes les parties de X sont des éléments de τ.

$\Longrightarrow$ τ est la topologie discrète.

Exercice n°2

Soit X un espace topologique, $A \subset X$

Montrer que $\mathring{A} \cap Fr(A) = \phi$ et $Fr(A) = Fr(CA)$.

Solution

- $\mathring{A} \cap Fr(A) = \mathring{A} \cap \bar{A} \cap C\mathring{A} = \bar{A} \cap \mathring{A} \cap C\mathring{A} = \bar{A} \cap \phi = \phi$

$\Longrightarrow \mathring{A} \cap Fr(A) = \phi$

- $Fr(CA) = \overline{CA} - \mathring{\widehat{CA}} = \overline{CA} - C\bar{A}$ car $\mathring{\widehat{CA}} = C\bar{A}$ (Proposition)

$= \overline{CA} \cap CC\bar{A} = \overline{CA} \cap \bar{A}$

$= \bar{A} \cap \overline{CA} = \bar{A} \cap C\mathring{A}$ car $\overline{CA} = C\mathring{A}$ (Proposition)

$= Fr(A)$

$\Longrightarrow Fr(A) = Fr(CA)$.

Exercice n°3

Soient X et Y deux espaces topologiques, Y séparé

$f : X \longrightarrow Y$ et $g : X \longrightarrow Y$ deux applications continues.

Montrer que $A = \{x \in X / f(x) \neq g(x)\}$ est un ouvert de X.

Solution

Pour montrer que A est ouvert (vu l'énoncé) il suffit de noter que A est voisinage de tous ses points, c'est à dire :

$\forall x \in A \; \exists W$ ouvert $/ \; x \in W \subset A$.

$$x \in A \Longrightarrow f(x) \neq g(x) \xRightarrow{Y \text{ séparé}} \begin{cases} \exists U \text{ ouvert de } Y / f(x) \in U \\ \exists V \text{ ouvert de } Y / g(x) \in V \\ U \cap V = \phi \end{cases}$$

Posons $W = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$.

- U ouvert de $Y \xrightarrow{f \text{ continue}} f^{-1}(U)$ ouvert de X
- V ouvert de $Y \xrightarrow{g \text{ continue}} g^{-1}(V)$ ouvert de X

$\Big\} \Rightarrow W = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ ouvert de X.

- $t \in W \Rightarrow t \in f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \Rightarrow t \in f^{-1}(U)$ et $t \in g^{-1}(V)$

$\Rightarrow f(t) \in U$ et $g(t) \in V \xrightarrow{U \cap V = \phi} f(t) \neq g(t) \Rightarrow t \in A$

$\Rightarrow W \subset A$

Conclusion

$\forall x \in A\ \exists W$ ouvert $/ x \in W \subset A \Rightarrow A$ est un ouvert de X.

Exercice n° 4

Soit E un ensemble, d et e deux distances sur E telles que :

$d(x,y) \leq k\, e(x,y)$ ① et $e(x,y) \leq l\, d(x,y)$ ②, $x, y \in E$ $k>0$ $l>0$.

Montrer que (E,d) complet $\Rightarrow (E,e)$ complet.

Solution

Pour montrer que (E,e) est complet, considérons (x_n) une suite de Cauchy de (E,e) et montrons qu'elle converge dans (E,e).

Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy de (E,e). et

Soit $\varepsilon > 0 \xrightarrow{k>0} \frac{\varepsilon}{k} > 0 \xrightarrow[\text{de } (E,e)]{(x_n)_n \text{ de Cauchy}} \exists n_0 \in \mathbb{N} / \begin{matrix} p \geq n_0 \\ q \geq n_0 \end{matrix} \Rightarrow e(x_p, x_q) \leq \frac{\varepsilon}{k}$

$\Rightarrow k\, e(x_p, x_q) \leq \varepsilon \xrightarrow{①} d(x_p, x_q) \leq \varepsilon$.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \begin{matrix} p \geq n_0 \\ q \geq n_0 \end{matrix} \Rightarrow d(x_p, x_q) \leq \varepsilon$.

$\Rightarrow (x_n)_n$ est une suite de Cauchy de (E,d)

$\xrightarrow[(E,d) \text{ complet}]{\text{Hypothèse}} x_n \longrightarrow x_0$ dans (E,d).

Soit $\varepsilon > 0 \xRightarrow{\ell > 0} \frac{\varepsilon}{\ell} > 0 \xRightarrow[\text{dans}(E,d)]{x_n \to x_0} \exists n_1 \in \mathbb{N} / n \geq n_1 \Rightarrow d(x_n, x_0) \leq \frac{\varepsilon}{\ell}$

$\Rightarrow \ell\, d(x_n, x_0) \leq \varepsilon \xRightarrow{(2)} e(x_n, x_0) \leq \varepsilon$.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_1 \in \mathbb{N} / n \geq n_1 \Rightarrow e(x_n, x_0) \leq \varepsilon$

$\Rightarrow x_n \to x_0$ dans $(E, e) \Rightarrow (E, e)$ complet.

Exercice n° 5

Soit E un espace topologique compact, $F \subset E$.

Montrer que si F est fermé alors F est compact.

Solution

Montrer que F est compact revient à montrer que l'espace (F, τ_F) est compact et comme par hypothèse F est fermé, montrons que (F, τ_F) est compact en utilisant la définition de la compacité qui utilise les fermés.

Soit donc $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de F telle que $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$ et montrons qu'il existe $F_{i_1}, \ldots, F_{i_n} / F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_n} = \emptyset$.

F_i fermé de $F \Rightarrow F_i = F_i' \cap F$ avec F_i' fermé de E

$\xRightarrow[\text{F fermé de E}]{\text{Hypothèse}} F_i = F_i' \cap F$ est un fermé de E

$\Rightarrow (F_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés de E telle que $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$

$\xRightarrow[\text{E compact}]{\text{Hypothèse}} \exists F_{i_1}, \ldots, F_{i_n} / F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_n} = \emptyset$

$\Rightarrow F$ est compact