Université Aboubekr Belkaid Tlemcen

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

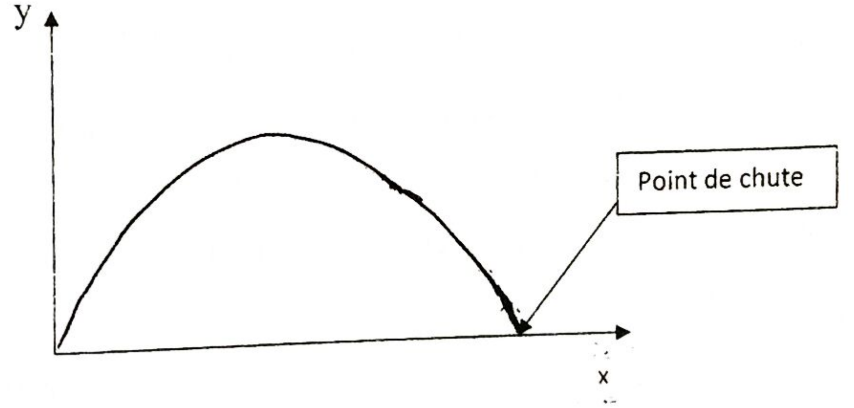
L2 - Maths

AU : 2023/2024

Durée: 1h30mn

Epreuve Finale d'Analyse Numérique 1

EXERCICE 1 **(06 pts)** Estimer par la méthode des moindres carrés le point de chute de la trajectoire parabolique issue de l'origine ayant observé les points, par exemple à l'aide d'un radar, $P_1(1,4)$, $P_2(2,5)$, $P_3(3,6)$, $P_4(4,3)$.



EXERCICE 2 **(7 pts)** On considère la table suivante :

x	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0
f(x)	16.4446	20.0855	24.5325	29.9641	36.5982	44.7012	54.5982

1. Calculer f(3.3) par interpolation polynomiale de votre choix :
   - **a-** à partir des données 3.0, 3.2 et 3.4
   - **b-** à partir des données 3.0, 3.2 , 3.4 et 3.6
2. Donner une majoration de l'erreur théorique d'interpolation sachant que : $f(x) = e^x$.
3. Comparer à l'erreur réelle.

…/…

EXERCICE 3 **(07pts)** Soit donnée l'équation : $x^3 - \ln x - 8 = 0$

1. Séparer graphiquement les racines de cette équation.
2. Montrer que la plus grande racine est comprise dans un intervalle de la forme [n , n+1], $n \in \mathbb{N}$. On note S la plus grande racine.
3. Ecrire l'équation donnée sous la forme $x = g(x)$ puis montrer que la méthode du point fixe (des approximations successives)

$$\begin{cases} x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0,1, \ldots.. \\ x_0 \; quelconque \; dans \; [a, b]. \end{cases}$$

Converge vers la racine s de l'équation donnée.

4. En partant de l'approximation initiale $x_0 = a$, estimer le nombre d'itérations nécessaires à l'approximation de la racine à 10^{-6} prés.
5. Trouver la valeur approchée de cette racine par cette méthode et avec cette précision.

-Bonne chance -

Corrigé de l'Epreuve finale d'Analyse Numérique 1

Exercice 1 : 06 pts

x_i	1	2	3	4
y_i	4	5	6	3

modèle : $F(x, \alpha) = ax^2 + bx$

inconnues : a et b.

(1) l'erreur : $r_i = y_i - a x_i^2 - b x_i \quad i = \overline{1,4}$

- Déterminer a et b / $S = \sum_{i=1}^{4} r_i^2$ soit minimale.

$$S = \sum_{i=1}^{4} (y_i - a x_i^2 - b x_i)^2$$

(1) → Condition nécessaire du minimum :

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \Rightarrow 2 \sum_{i=1}^{4} (-x_i)^2 (y_i - a x_i^2 - b x_i) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{4} x_i^4\right) a + \left(\sum_{i=1}^{4} x_i^3\right) b = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 y_i$$

(1) $$\Rightarrow 354 a + 100 b = 126$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 0 \Rightarrow 2 \sum_{i=1}^{4} (-x_i)(y_i - a x_i^2 - b x_i) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{4} x_i^3\right) a + \left(\sum_{i=1}^{4} x_i^2\right) b = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i$$

$$\Rightarrow 100 a + 30 b = 44$$

(1)

(1) $\begin{cases} 354a + 100b = 126 \\ 100a + 30b = 44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4.8 \end{cases}$

(1) $y = -x^2 + 4.8x$

Le point de chute : $\boxed{x = 4.8}$

Exercice 2 07pts

(1) a/ Formule de Newton :

3	20.0855	4.447	0.9846
3.2	24.5325	5.4316	
3.4	29.9641		

(1)

$q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x-3}{0.2}$

$$P_2(x) = y_0 + \frac{q}{1!}\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0$$

$$= 20.0855 + 4.447\left(\frac{x-3}{0.2}\right) + \frac{0.9846}{2}\left(\frac{x-3}{0.2}\right)\left(\frac{x-3}{0.2}-1\right)$$

(1) $f(3.3) \simeq P_2(3.3) = 27.125225$

b/ Formule de Newton :

3	20.0855	4.447	0.9846	0.2179
3.2	24.5325	5.4316	1.2025	
3.4	29.9641	6.6341		
3.6	36.5982			

(1)

$$P_3(x) = y_0 + \frac{q}{1!}\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

$$= P_2(x) + \frac{0.2179}{6}\left(\frac{x-3}{0.2}\right)\left(\frac{x-3}{0.2}-1\right)\left(\frac{x-3}{0.2}-2\right)$$

(1) $f(3.3) \simeq P_3(3.3) = 27.1116063$

(2) a/ - L'erreur théorique :

$$E_1(x) = f(x) - P_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-3)(x-3.2)(x-3.4)$$
pour $\xi \in [3, 3.4]$

(1)
$$\frac{|f^{(3)}(\xi)|}{3!}\left|(x-3)(x-3.2)(x-3.4)\right| \leq \frac{e^{3.4}}{6} \times 0.2 \times 0.2 \times 0.4 = 0.0799$$

- L'erreur réelle :

(0,5) $|f(3.3) - P_2(3.3)| = |e^{3.3} - 27.125225| = 0.01258$

b/ - L'erreur théorique :

$$E_2(x) = f(x) - P_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-3)(x-3.2)(x-3.4)(x-3.6)$$
pour $\xi \in [3, 3.6]$

(1)
$$|E_2(x)| \leq \frac{e^{3.6}}{24} \times 0.2 \times 0.2 \times 0.4 \times 0.6 = \frac{e^{3.6}}{24} \times 0.0096 = 0.0146$$

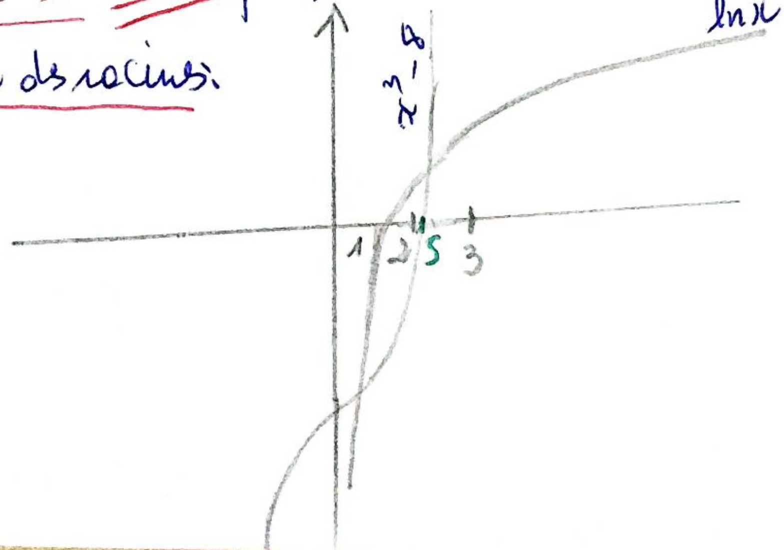
- L'erreur réelle :

(0,5) $|f(3.3) - P_3(3.3)| = |e^{3.3} - 27.111606| = 0.001$

Conclusion : L'erreur réelle est plus petite que l'erreur théorique.

Exercice 3 : 07P15 $f(x) = x^3 - \ln x - 8 = 0$

1°/ Séparation des racines.



$f(0^+) = +\infty$

1 $\left.\begin{array}{l} f(0^+)=+\infty \\ f(1) = -7 \end{array}\right\} \Rightarrow$ il existe une racine sur $]0,1[$.

$f(2) = 8 - \ln 2 - 8 = -0.69$

$f(3) = 27 - \ln 3 - 8 = 17.90$ $\Big\} \Rightarrow f(2).f(3) < 0$

donc, il existe une deuxième racine sur $]2,3[$.

2°/ • $f(\alpha).f(3) < 0$.

2 • f est continue sur $]2,3[$.

• $f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2} > 0 \quad \forall x \in]2,3[$.

donc, f est strictement croissante sur $]2,3[$.

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe une unique racine $S \in]2,3[$.

3°/ $x^3 = \ln x + 8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\ln x + 8} = g(x)$.

• $g'(x) = \frac{1}{3x}(\ln x + 8)^{-\frac{2}{3}} > 0$ sur $]2,3[$.

$g''(x) = -\frac{1}{3x^2}\left[(\ln x + 8)^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}(\ln x + 8)^{-\frac{5}{3}}\right] < 0$ sur $[2,3]$.

Ainsi, g' est décroissante sur $[2,3]$.

1 $|g'(x)| \leq g'(2) = \frac{1}{6}(8 + \ln 2)^{-\frac{2}{3}} = 0.0394\,2128 < 1$

• $g(x) = \sqrt[3]{\ln x + 8}$

g est continue et strictement croissante sur $]2,3[$.

$\left.\begin{array}{l} g(2) = 2.0561 \\ g(3) = 2.0876 \end{array}\right\} \Rightarrow [g(2), g(3)] \subset [2,3]$.

donc, g est stable sur $[2,3]$.

Alors, d'après le théorème du point fixe la suite définie par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt[3]{\ln x_n + 8}, & n = 0, 1, \dots \\ x_0 \text{ quelconque dans }]2, 3[. \end{cases}$$

converge vers la racine s de l'équation $f(x) = 0$

4°/

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt[3]{\ln x_n + 8}, & n = 0, 1, \dots \\ x_0 = 2 \\ \text{Test d'arrêt} : |x_{n+1} - x_n| \leq 10^{-6} \end{cases}$$

1

Notons par N le nombre d'itérations :

On a : $\frac{q^N}{1-q} |x_1 - x_0| \leq \varepsilon$.

$$\frac{(0.03942128)^N}{1 - 0.03942128} |2.05616996 - 2| \leq 10^{-6}.$$

1 Ceci donne $N \geq 3.394$ $\boxed{N \geq 4}$

5°/ Calcul de la solution approchée :

n	0	1	2	3	4	5
x_n	2	2.05616996	2.05835142	2.05843484	2.05843803	2.05843815

On a : $|x_5 - x_5| = 1.21 \times 10^{-7} < 10^{-6}$.

donc, la solution approchée est :

1 $s = x_5 = 2.05843815$ pour une précision : $\varepsilon = 10^{-6}$