Exercice 1 : Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer le polynôme caractéristique de A.
Montrer que A est trigonalisable mais non diagonalisable.
Trouver une base B dans $\mathbb{R}^3$ dans la quelle A est semblable à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} x & x & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trouver la décomposition de Dunford de M puis déduire celle de A.
Donner la matrice A^{2024}.

Exercice 2 : Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et e un réel non nul. Soit u un endomorphisme de E vérifiant $u^3 - 3eu^2 + e^2u = 0.$ Est-ce que le noyau de u et l'image de u sont supplémentaires dans E ?

Exercice 3 : Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et soit f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 + f - 2 = 0$ avec $(f + 2id)$ non nul. Montrer qu'il existe un vecteur propre de f associé à la valeur propre 1, image de l'endomorphisme $f + 2id$.
Dire pourquoi $Im(f + 2id)$ est stable par l'endomorphisme $f - id$.
Est-ce que $Im\ (f - id)$ est stable par l'endomorphisme $(f + 2id)$?
Supposons qu'on n'a pas la condition $(f + 2id)$ non nul. Montrer sans utiliser le lemme des noyaux que E est somme directe de $ker(f + 2id)$ et $ker(f - id)$.

Corrigé EF Algèbre3

09-01-24

Exo1 (0?pts)

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

0,5 • $P_A(x) = \det(A - x I_3) = \dots = -(x-1)^3$

0,5 • $P_A(x)$ est scindé sur $\mathbb{R}$ donc A est trigonalisable.

0,5 • A possède une seule v.p. A n'est pas scalaire donc A non diagonalisable.

• A est semblable à $M = \begin{pmatrix} x & x & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

0,5 $\Longrightarrow tr(A) = tr(M) \Rightarrow 3 = 2x+1 \Rightarrow x = 1.$

Donc $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

• $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$ tel que

$Av_1 = (1,0,0)_B$, $Av_2 = (1,1,0)_B$ et $Av_3 = (0,1,1)_B$

0,5 Soit $\begin{cases} Av_1 = v_1 & ① \\ Av_2 = v_2 + v_1 & ② \\ Av_3 = v_3 + v_2 & ③ \end{cases}$

On résout les 3 systèmes ①, ② et ③ :

0,5 ① $\begin{cases} y+z = x \\ -x+y+z = y \\ -x+y+2z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z = x \\ -x+z = 0 \\ -x+y+z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$; $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est sol de ①

0,5 ② $\begin{cases} y+z = x+1 \\ -x+y+z = y \\ -x+y+2z = z+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = z \end{cases}$; $v_2 = (0,1,0)$ est sol de ②

0,5 ③ $\begin{cases} y+z = x \\ -x+y+z = y+1 \\ -x+y+2z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+z = 0 \\ -x+z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ z = 1+x \end{cases}$;

$v_3 = (0,-1,1)$ est sol de ③

2

Décomposition de Dunford de M :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N}$$

0,5 • I_3 diagonale donc diagonalisable

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

0,5 • $N^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \Leftrightarrow N$ nilpotente

0,5 • $I_3 N = N I_3 = N$

Donc $I_3 + N$ est la décomp. de Dunford de M.

Décomposition de Dunford de A :

On a $A = PMP^{-1}$ où $P = \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

$A = P(I_3 + N)P^{-1}$

0,5 $A = PI_3P^{-1} + PNP^{-1} = I_3 + N'$, $N' = PNP^{-1}$

• I_3 est diagonale donc diagonalisable.

0,5 • N' est nilpotente car N est nilpotente.

• $I_3 N' = N' I_3 = N'$

Donc $I_3 + N'$ est la décomposition de Dunford de A.

0,5 $A^{2024} = (I_3 + N')^{2024} = \sum_{k=0}^{2024} C_{2024}^{k} N'^{k} I_3$

$= I_3 + 2024\,N' + 1012 \times 2023\,N'^2$

avec $N' = PNP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

③

Exo2 (6 pts) $f \in \mathcal{L}(E)$, $a \neq 0$

$f^3 - 3af^2 + a^2 f = 0$

0,5 Soit $P(x) = x^3 - 3ax^2 + a^2 x$, $a \neq 0$

0,5 P est annulateur de f.

0,5 $P(x) = x(x^2 - 3ax + a^2)$

On pose $P_1(x) = x$ et $P_2(x) = x^2 - 3ax + a^2$

0,5 P_1 et P_2 sont premiers entre eux

Donc d'après le lemme des noyaux, on a :

0,5 $$\operatorname{Ker} P(f) = \operatorname{Ker} P_1(f) \oplus \operatorname{Ker} P_2(f)$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Ker} P(f) = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f^2 - 3af + a^2 id)$$

0,5 or $\operatorname{Ker} P(f) = E$

Montrons que $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(f^2 - 3af + a^2 id)$:

1,5 "$\subset$" soit $y \in \operatorname{Im}(f) \Rightarrow \exists x \in E \,/\, y = f(x)$

on a $(f^2 - 3af + a^2)(f(x))$

$$= f^3(x) - 3af^2(x) + a^2 f(x) = 0$$

car $f^3 - 3af^2 + a^2 f = 0$

Donc $f(x) = y \in \operatorname{Ker}(f^2 - 3af + a^2 id)$.

1,5 "$\supset$" Soit $y \in \operatorname{Ker}(f^2 - 3af + a^2 id)$

$$\Rightarrow f^2(y) - 3af(y) + a^2 y = 0, \quad a \neq 0$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{a^2} f^2(y) + \frac{3}{a} f(y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = f\left[-\frac{1}{a^2} f(y) + \frac{3}{a} y\right] \in \operatorname{Im}(f). \\ a \neq 0. \end{cases}$$

(4)

Exo3 (7pts) $f^2+f-2id=0$ et $f+2id\neq 0$

0,5 On pose $P(x)=x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

0,5 On a $P(f)=0 \Leftrightarrow P$ annulateur de f.

0,5 On a $f+2id\neq 0$ donc $\exists x\in E \,/\, u=(f+2id)(x)\neq 0$

Or $f^2+f-2id=(f-id)\circ(f+2id)=0$

0,5 $\Rightarrow \forall x\in E \ (f-id)\left[(f+2id)(x)\right]=0$

0,5 Donc en particulier pour $x \,/\, (f+2id)(x)=u$.

1 u étant non nul, $(f-id)(u)=0$

$\Rightarrow f(u)=u$

D'où u est vect. propre de f associé à la v.p 1.

On sait que: $u\circ v=v\circ u \Rightarrow \ker v$ et $\operatorname{Im} v$ stables par u
et aussi $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$ stabl. par v

0,5 Or $(f+2id)\circ(f-id)=(f-id)\circ(f+2id)$

0,5 Donc $\operatorname{Im}(f+2id)$ est stabl par $f-id$

0,5 et aussi $\operatorname{Im}(f-id)$ " " " $f+2id$.

Montrons que $E=\ker(f+2id)\oplus\ker(f-id)$

càd montrons que ① $\ker(f+2id)\cap\ker(f-id)=\{0\}$

② $E=\ker(f+2id)+\ker(f-id)$

1 ① soit $x\in\ker(f+2id)\cap\ker(f-id)$

$\Rightarrow (f(x)+2x=0$ et $f(x)-x=0) \Rightarrow x=0$

1 ② Soit $x\in E$, montrons qu'$\exists x_1\in\ker(f+2id)$,

$\exists x_2\in\ker(f-id)$

tel que $x=x_1+x_2$

Il suffit de choisir $x_1=\frac{1}{3}(x-f(x))$ et $x_2=\frac{1}{3}(f(x)+2x)$.