Université de Tlemcen — le 06/12/2023

Département de mathématiques.

L2 Mathématiques.

Module : Topologie. — durée : 1h45'

Epreuve du contrôle continu

Exercice n° 1

Soit E un espace topologique, $A \subset E$

1°/ Montrer que $\complement \mathring{A} = \overline{\complement A}$

2°/ En déduire que $\complement \overline{A} = \mathring{\overline{\complement A}}$

Exercice n° 2

Soit (E,d) un espace métrique et f l'application définie sur $E \times E$ par $f(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$

1°/ Montrer que f définit une distance sur E

2°/ f est elle bornée ?

Exercice n° 3

Soient X et Y deux espaces topologiques ; $A \subset X$; $B \subset X$, $X = A \cup B$; $f : X \longrightarrow Y$ une application,

$f_A : A \longrightarrow Y$, $x \longmapsto f_A(x) = f(x)$ et $f_B : B \longrightarrow Y$, $x \longmapsto f_B(x) = f(x)$.

1°/ Soit $W \subset Y$, montrer que $f_A^{-1}(W) = A \cap f^{-1}(W)$.

2°/ Montrer que si f est continue alors f_A et f_B sont continues (A et B étant munis de la topologie induite)

3°/ Montrer que si A et B sont fermés et que f_A et f_B sont continues alors f est continue.

Exercice n° 1 : 6pts ; Exercice n° 2 : 6pts ; Exercice : 8pts Bon Courage

Université de Tlemcen — le 6/12/2023

Département de mathématiques

L2 Mathématiques

Module : Topologie

Corrigé de l'épreuve du contrôle continu.

Exercice n° 1

Soit E un espace topologique. $A \subset E$

1°/ Montrer que $C\mathring{A} = \overline{CA}$

Solution

$$C\mathring{A} = \overline{CA} \ ?$$

pour cela montrons que

$$x \notin C\mathring{A} \iff x \notin \overline{CA}$$

$x \notin C\mathring{A} \iff x \in \mathring{A} \iff \exists U$ ouvert $/ U \subset A$ et $x \in U$

$\iff \exists U$ ouvert $/ x \in U$ et $U \cap CA = \emptyset \iff x \notin \overline{CA}$ c.q.f.d.

2°/ En déduire que $C\overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{CA}}$

Solution : posons $B = CA$

d'après 1°/ on $C\mathring{B} = \overline{CB} \iff C\overset{\circ}{\widehat{CA}} = \overline{CCA}$

$\iff CC\overset{\circ}{\widehat{CA}} = \overline{A} \iff \overset{\circ}{\widehat{CA}} = C\overline{A}$ c.q.f.d.

M. Mebkhout

Exercice n° 2

Soit (E,d) un espace métrique et f l'application définie sur $E\times E$ par $f(x,y)=\dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$.

1°/ Montrer que f définit une distance sur E

Solution

- $f(x,y)=\dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\geq 0$ car $d(x,y)\geq 0$ (d étant une distance).

- $f(x,y)=\dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\overset{d\text{ distance}}{=}\dfrac{d(y,x)}{1+d(y,x)}=f(y,x)$, $x,y\in E$

- $f(x,y)=0 \iff \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}=0 \iff d(x,y)=0 \overset{d\text{ distance}}{\iff} x=y$

  $x,y\in E$

- Soient $x,y,z\in E$ et montrons que.

  $f(x,y)\leq f(x,z)+f(z,y)$..

Comme d est une distance, on a $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$ → ①

En s'inspirant de la définition de f, remarquons que la fonction $h: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$t \longmapsto h(t)=\dfrac{t}{1+t}$ est croissante car

$h'(t)=\dfrac{1}{(1+t)^2}>0$

$$① \xRightarrow{h\text{ croissante}} h(d(x,y))\leq h(d(x,z)+d(z,y))$$

$$\Longrightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\leq\frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)}$$

$$\Longrightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\leq\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)}+\frac{d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)}$$

M. Mebkhout

$$\Longrightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)} \quad (2)$$

car $1+d(x,z)+d(z,y) \geq 1+d(x,z)$

et $1+d(x,z)+d(z,y) \geq 1+d(z,y)$.

$(2) \Longrightarrow f(x,y) \leq f(x,z)+f(z,y)$.

Tous les axiomes sont vérifiés, par conséquent

f définit une distance sur E

2°/ f est elle bornée.

Soit $x,y \in E$ $\quad f(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leq 1$ car $1+d(x,y) \geq d(x,y)$

$\Longrightarrow \forall x,y \in E \quad f(x,y) \leq 1 \Longrightarrow f$ est bornée

Exercice n° 3

Soient X et Y deux espaces topologiques $A \subset X$, $B \subset X$

$X = A \cup B$ $\quad f : X \longrightarrow Y$ une application.

$$f_A : A \longrightarrow Y \qquad \text{et} \quad f_B : B \longrightarrow Y$$
$$x \longmapsto f_A(x) = f(x)$$

1°/ Soit $W \subset Y$ montrer que $f_A^{-1}(W) = A \cap f^{-1}(W)$

Solution

$x \in A \Rightarrow f_A(x) = f(x)$

$x \in f_A^{-1}(W) \Longleftrightarrow x \in A$ et $f_A(x) \in W \Longleftrightarrow x \in A$ et $f(x) \in W$

$\Longleftrightarrow x \in A$ et $x \in f^{-1}(W) \Longleftrightarrow x \in A \cap f^{-1}(W)$.

$\Longrightarrow f_A^{-1}(W) = A \cap f^{-1}(W)$.

M. Mebkhout

2°/ Montrer que si f est continue alors f_A et f_B sont continues. (A et B étant muni de la topologie induite.

Solution

Hypothèse : f continue. Conclusion f_A et f_B continue.

Pour montrer que $f_A : A \longrightarrow Y$ est continue, il faut montrer (d'après ce qu'on a vu en cours) que :

$\forall\, U$ ouvert de Y, $f_A^{-1}(U)$ est un ouvert de A.

Soit U ouvert de Y $\xrightarrow[f \text{ continue}]{Hyp}$ $f^{-1}(U)$ ouvert de X ①

d'autre part d'après 1°/ $f_A^{-1}(U) = A \cap f^{-1}(U)$. ②

$\xrightarrow[\text{A muni de la topo induite}]{\text{① et ②}}$ $f_A^{-1}(U)$ ouvert de $A \Longrightarrow f_A$ continue.

Même raisonnement pour f_B.

3°/ Montrer que si A et B sont fermés et que f_A et f_B sont continues alors f continue.

Solution :

Pour montrer que f est continue il faut montrer que :

$\forall\, F$ fermé de Y $f^{-1}(F)$ est un fermé de X.

F fermé de Y $\xrightarrow[f_A \text{ continue}]{Hyp}$ $f_A^{-1}(F)$ fermé de A

$\Longrightarrow f_A^{-1}(F) = G \cap A$ avec G fermé de X

$\xrightarrow[\text{A fermé de X}]{Hyp}$ $f_A^{-1}(F)$ est un fermé de X

M. Mebkhout

En utilisant le même raisonnement, on montre que f_B^{-1} est un fermé de X.

D'autre part $f^{-1}(F) = f_A^{-1}(F) \cup f_B^{-1}(F)$.

En effet :

$$f_A^{-1}(F) \cup f_B^{-1}(F) \overset{1°/}{=\!=} (A \cap f^{-1}(F)) \cup (B \cap f^{-1}(F))$$

$$= (A \cup B) \cap f^{-1}(F) \underset{A \cup B = X}{\overset{Hyp}{=\!=}} X \cap f^{-1}(F) \overset{f^{-1}(F) \subset X}{=\!=} f^{-1}(F)$$

Conclusion.

$$\left.\begin{array}{l} f_A^{-1}(F) \text{ fermé de } X \\ f_B^{-1}(F) \text{ fermé de } X. \\ f^{-1}(F) = f_A^{-1}(F) \cup f_B^{-1}(F) \end{array}\right\} \Rightarrow f^{-1}(F) \text{ fermé de } X$$

$\Rightarrow f$ continue. c.q.f.d.