Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2023-2024

2ème Année Licence Mathématique — Durée : 01H30.

Contrôle Continu : Logique mathématique

Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits

Exercice 1 : (06 points)

Soit p la proposition " X estime Y " et q la proposition " Y estime X ".
Écrire sous forme symbolique les phrases suivantes :

1. X estime Y mais Y ne lui rend pas son estime.
2. X et Y s'estiment.
3. X et Y se détestent.
4. Y est estimé par X mais X est détesté par Y.

Exercice 2 : (06 points)

Trois touristes font chacun une déclaration :
1er touriste : " Nous avons visité le musée du Bardo et le jardin d'essais mais pas le musée des beaux arts ".
2ème touriste : " Nous avons visité les beaux arts et le jardin d'essais mais pas le Bardo ".
3ème touriste : " Nous avons visité le Bardo et les beaux arts mais pas le jardin déssais ".
Sachant que chaque touriste ment une et une seule fois dans sa déclaration, qu'est ce qu'ils ont réellement visité ?

Exercice 3 : (08 points)

Soit les deux connecteurs suivants :

$$p \bigoplus q \equiv (p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q),$$

et

$$p \otimes q \equiv (p \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee q).$$

1. Dresser la table de vérité des deux connecteurs.
2. Montrer que $p \bigoplus p$ est une contradiction et que $p \otimes p$ est une tautologie.
3. Montrer que les deux connecteurs sont commutatifs.
4. Sans la table de vérité, montrer que :

$$p \bigoplus \bar{q} \equiv \bar{p} \bigoplus q \text{ et } \bar{p} \bigoplus \bar{q} \equiv p \bigoplus q.$$

5. Montrer que $\overline{p \bigoplus q} \equiv p \otimes q$.

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2023-2024

2ème Année Licence Mathématique — Durée : 01H30.

Corrigé CC : Logique mathématique

Exercice 1 : (06 points)

Soit p la proposition " X estime Y " et q la proposition " Y estime X ".
Écrire sous forme symbolique les phrases suivantes :
1. X estime Y mais Y ne lui rend pas son estime : $p \wedge \overline{q}$.
2. X et Y s'estiment : $p \wedge q$.
3. X et Y se détestent : $\overline{p} \wedge \overline{q}$.
4. Y est estimé par X mais X est détesté par Y : $p \wedge \overline{q}$.

Exercice 2 : (06 points)

Soient B, J et A trois variables propositionnelles symbolisant :

- B : visite du musée du Bardo
- J : visite du Jardin d'essais
- A : visite du musée des baux Arts

Les déclarations des trois touristes peuvent être formalisées comme suit :

1er touriste : $B \wedge J \wedge \neg A$

2ème touriste : $\neg B \wedge J \wedge A$

3ème touriste : $B \wedge \neg J \wedge A$

Sachant que chaque touriste a menti une et une seule fois dans sa déclaration, la réalité de ce qu'ils ont réellement visité peut être :

1er touriste : $\{\neg B \wedge J \wedge \neg A, \quad B \wedge \neg J \wedge \neg A, \quad B \wedge J \wedge A\}$

2ème touriste : $\{B \wedge J \wedge A, \quad \neg B \wedge \neg J \wedge A, \quad \neg B \wedge J \wedge \neg A\}$

3ème touriste : $\{\neg B \wedge \neg J \wedge A, \quad B \wedge J \wedge A, \quad B \wedge \neg J \wedge \neg A\}$

La proposition commune à ces ensembles de propositions est $B \wedge J \wedge A$; donc les trois touristes ont visité le musée du bardo, le jardin d'essais et le musée des beaux arts.

Exercice 3 : (08 points)

Soit les deux connecteurs suivants :

$$p \bigoplus q \equiv (p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q),$$

et

$$p \otimes q \equiv (p \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee q).$$

1. Dresser la table de vérité des deux connecteurs :

p	q	$p \wedge \bar{q}$	$\bar{p} \wedge q$	$p \bigoplus q$
1	1	0	0	0
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
0	1	0	1	1

p	q	$p \vee \bar{q}$	$\bar{p} \vee q$	$p \otimes q$
1	1	1	1	1
0	0	1	1	1
1	0	1	0	0
0	1	0	1	0

2. Montrer que $p \bigoplus p$ est une contradiction et que $p \otimes p$ est une tautologie :

$$p \bigoplus p \equiv (p \wedge \bar{p}) \vee (\bar{p} \wedge p), \text{ qui est toujours fausse donc une contradiction,}$$

et

$$p \otimes p \equiv (p \vee \bar{p}) \wedge (\bar{p} \vee p), \text{ qui est toujours vraie donc une tautologie.}$$

3. Montrer que les deux connecteurs sont commutatifs. (la commutativité des connecteurs $\wedge$ et $\vee$ permet de démontrer cette question)
4. Sans la table de vérité, montrer que : (un petit calcul et la commutativité des connecteurs $\wedge$ et $\vee$ permet de démontrer cette question)

$$p \bigoplus \bar{q} \equiv \bar{p} \bigoplus q \text{ et } \bar{p} \bigoplus \bar{q} \equiv p \bigoplus q.$$

5. Montrer que $\overline{p \bigoplus q} \equiv p \otimes q$: On peut le voir directement dans les deux tables de vérité (les deux dernière colonnes).

Barème :

Exercice 1 : $01, 5pts + 01, 5pts + 01, 5pts + 01, 5pts = 06pts.$

Exercice 2 : $06pts.$

Exercice 3 :

1 :$01pt + 01pt.$

2 :$0, 5pt + 0, 5pt.$

3 :$01pt + 01pt.$

4 :$01pt + 01pt.$

5 :$01pt.$