Université Aboubekr BELKAID Tlemcen

Département de Mathématiques

AU : 2023/2024

Contrôle Continu d' Analyse Numérique 1

EXERCICE 1 : On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln(x) - arctg(x), \qquad x > 0.$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique racine α qu'on localisera dans un intervalle I entre deux entiers consécutifs.

2. On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = g(x_n) \quad \text{avec } g(x) = x - \ln(x) + \text{arctg}(x) \end{cases}$$

Montrer que sa limite est α et en déduire le nombre d'itérations N qui assure que

$$|x_N - \alpha| < 10^{-6}.$$

3. Soit la suite

$$\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = h(x_n) \quad \text{avec } h(x) = \text{tg}(\ln(x)) \end{cases}$$

Cette suite converge t-elle vers α ?

4. On définit la suite

$$\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = k(x_n) \quad \text{avec } k(x) = \exp(\text{arctg}(x)) \end{cases}$$

Montrer qu'elle converge vers α et donner le nombre d'itérations P pour que

$$|x_P - \alpha| < 10^{-6}.$$

5. Déterminer la racine α de $f(x) = 0$ par l'une des trois méthodes précédentes en justifiant le choix de la méthode utilisée.

.../...

EXERCICE 2 : Les valeurs de l'intégrale de probabilité : $\varphi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}\,dx$

sont données par le tableau suivant :

X_i	1.0	1.1	1.2	1.3
Y_i	0.8427	0.8802	0.9103	0.9340

En appliquant la formule d'interpolation de Newton, trouver la valeur approchée de $\varphi(1.25)$.

EXERCICE 3 : Soit la fonction f(x) donnée par le tableau suivant :

x_i	-1	0	2	4
$f(x_i)$	0	1	0	-2

Calculer $f(0.5)$ par une interpolation polynomiale de Lagrange.

-Bonne chance -

Corrigé du Contrôle Continu d'Analyse Numérique 1

Exercice 1 : 10 pts

$$f(x) = \ln x - \operatorname{arctg} x \quad , \quad x > 0$$

1) 0,5 • f continue sur $[3,4]$.

0,5 • f strictement monotone sur $[3,4]$.

$\left(f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x^2} > 0 \right.$ sur $[3,4]$.

0,5 • $f(3) = \ln 3 - \operatorname{arctg}(3) = -0.15$
$f(4) = \ln 4 - \operatorname{arctg}(4) = 0.06$ $\Big\} \Rightarrow f(3)\cdot f(4) < 0$

Par le théorème des valeurs intermédiaires
0,5 l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule racine sur $[3,4]$.

2)
$$(1) \begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = x_n - \ln x_n + \operatorname{arctg} x_n \; ; \; n = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

$g(x) = x - \ln(x) + \operatorname{arctg} x$.

$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{1+x^2} > 0$ sur $[3,4]$.

$g''(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{(-2x)}{(1+x^2)^2} > 0$ sur $[3,4]$

0,5 Par suite, g' est croissante sur $[3,4]$.

0,5 $|g'(x)| < g'(4) = 0,808 = q < 1$.

Ainsi, la suite (1) converge vers $\alpha \in [3,4]$

– le nombre d'itérations :

$$\frac{q^N}{1-q} |x_1 - x_0| \leq 10^{-6}$$

$$\frac{(0.808)^N}{1-0,808} |3.15 - 3| \leq 10^{-6} \qquad N \geq \frac{\ln(1,28\times10^{-6})}{\ln(0,808)}$$

$N \geq 63,64$

0,5 $\boxed{N = 64}$

3 (2) $\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = tg(\ln(x_n)) \end{cases}$; $n = 0, 1, \ldots$

$h(x) = tg(\ln(x))$

0,5 $h'(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\cos^2(\ln x)} > 0$

On a : $|h'(x)| > 1$ $\left(\begin{array}{l} h'(4) = 7.42 \\ h'(3) = 1.61 \end{array} \right)$

On ne peut rien conclure sur la convergence

0,5 de la méthode des approximations successives

pour cette forme de $h(x)$.

4

(3) $\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = \exp(\text{arctg}(x_n)) \end{cases}$; $n = 0, 1, \ldots$

$k(x) = \exp(\text{arctg}\, x)$

$k'(x) = (\text{arctg}\, x)' \exp(\text{arctg}\, x)$

0,5 $k'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \exp(\text{arctg}\, x) > 0$

$k''(x) = \dfrac{(1-2x)\exp(\text{arctg}\, x)}{(1+x^2)^2} < 0$ sur $[3,4]$.

0,5 Alors, k' est décroissante sur $[3,4]$.

0,5 $|k'(x)| \leq k'(3) = \dfrac{\exp(\text{arctg} 3)}{1+3^2} = 0{,}3487 < 1$

La suite (3) converge vers $\alpha \in [3,4]$.

- Le nombre d'illérations :

$\dfrac{q^p}{1-q} |x_1 - x_0| \leq 10^{-6}$

$\dfrac{0{,}3487^p}{1-0{,}3487} |3{,}487 - 3| \leq 10^{-6}$ $p \geq \dfrac{\ln(1{,}337 \times 10^{-6})}{\ln(0{,}3487)}$

$p \geq 12{,}83$

0,5 $\boxed{p = 13}$

* processus itératif du point fixe pour le calcul de α:

$x_0 = 3$

$x_{n+1} = \exp(\text{arctg}\, x_n)$; $n = 0, 1, \ldots$

0,5 Test d'arrêt:

$|x_{n+1} - x_n| \leq 10^{-6}$.

3

n	0	1	2	3	4
x_n	3	3,4870139	3,6382878	3.6787217	3.6890770

n	5	6	7	8
x_n	3,6916997	3.6923621	3.6925292	3.6925714

n	9	10	11	12
x_n	3,6925820	3.6925847	3.6925854	3.6925856

3

$$\boxed{\alpha = 3.6925856}$$

Exercice 2 05 Pts

x_i	1.0	1.1	1.2	1.3
y_i	0,8427	0,8802	0,9103	0,9340

- Interpolation polynomiale de Newton (Cas où les abscisses sont équidistantes).

1 $$P_3(x) = y_0 + (x-x_0)\frac{\Delta y_0}{h} + (x-x_0)(x-x_1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2} + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\frac{\Delta^3 y_0}{3!\,h^3}$$

01,5 - Tableau des différences finies

1	0.8427	$\boxed{0,0375}$	$\boxed{-0,0074}$	$\boxed{0.001}$
1.1	0.8802	0,0301	-0,0064	
1.2	0.9103	0,0237		
1.3	0.9340			

$$P_3(x) = 0,8427 + (x-1)\times\frac{0,0375}{0,1} + (x-1)(x-1,1)\times\frac{(-0,0074)}{2!\,(0,1)^2}$$

1 $$+ (x-1)(x-1,1)(x-1,2)\times\frac{0,001}{3!\,(0,1)^3}$$

$$f(1,25) \simeq P_3(1,25) = 0.8427 + (1.25-1)\times 0,375$$

0,5 $$+ (1,25-1)(1,25-1,1)\times(-0,37) +$$
$$(1,25-1)(1,25-1,1)(1,25-1,2)\times(0,166)$$
$$= 0,8427 + 0.09375 - 0,013875 + 3,1125\times 10^{-4}$$

1 $$= \boxed{0,922}$$

5

Exercice 3 (05 pts)

x_i	-1	0	2	4
y_i	0	1	0	-2

- Interpolation polynomiale de Lagrange :

1 $P_3(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x)$

$P_3(x) = 0 L_0(x) + L_1(x) + 0 L_2(x) - 2 L_3(x)$

$P_3(x) = L_1(x) - 2 L_3(x)$

0,75 $L_1(x) = \dfrac{(x+1)(x-2)(x-4)}{(0+1)(0-2)(0-4)} = \frac{1}{8}(x+1)(x-2)(x-4)$

0,5 $L_1(0,5) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-4\right) = \dfrac{63}{64}$

0,75 $L_3(x) = \dfrac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(4+1)(4-0)(4-2)} = \frac{1}{40}(x+1)\,x\,(x-2)$

0,5 $L_3(0,5) = \dfrac{1}{40}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-2\right) = -\dfrac{9}{320}$

0,5 $f(0,5) \simeq P_3(0,5) = L_1(0,5) - 2 L_3(0,5)$

$= \dfrac{63}{64} - 2 \times \left(-\dfrac{9}{320}\right)$

$= \dfrac{333}{320} = \boxed{1,04}$

1