Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2023/2024

جامعة أبو بكر بلقايد
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

$2^{ème}$ année MATH- Semestre 1
Contrôle continu : Analyse 3
Durée : 1h30mn

L'usage de tout document ou appareil électronique est strictement interdit.

Exercice 1. (6 Pts)
Étudier la nature des séries numériques suivantes

$$1)\ \sum \frac{e^{-a(n+1)}}{\sqrt{n+1}}, \quad a \in \mathbb{R}, \qquad\qquad 2)\ \sum (-1)^n \left(n^{1/n^2} - 1\right)$$

Exercice 2. (6 Pts)
Soit la série entière suivante

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} x^n.$$

1) Déterminer le rayon de convergence R.
2) En déduire le domaine de convergence.
3) Calculer la somme de la série entière f.

Exercice 3. (8 Pts)
Soit la série de fonction de terme général

$$u_n(x) = \frac{\arctan(x^{n+1})}{n(n+1)}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad x \geq 0.$$

1) Montrer que $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge normalement sur $[0, +\infty[$.
2) On note $S(x) = \sum_{n\geq 1} u_n(x)$. En déduire que S est continue sur $[0, +\infty[$.
3) Etablir que

$$\forall x > 0, \quad S(x) + S(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}.$$

4) Montrer que S est dérivable sur $[0, 1[$.
5) En déduire que S est croissante sur $[0, 1[$ et déterminer $\lim_{x\to 1^-} S'(x)$.

Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2023/2024

$2^{ème}$ année M.I - Semestre 1

Corrigé du contrôle continu : Analyse 3

Durée : 1h30mn

Exercice 1. (6 Pts)

1)$\sum \frac{e^{-a(n+1)}}{\sqrt{n+1}}$

Appliquons le critère de D'alembert.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-a(n+2)}}{\sqrt{n+2}}.\frac{\sqrt{n+1}}{e^{-a(n+1)}} = e^{-a}. \quad (\mathbf{0,5Pt})$$

On remarque que si $e^{-a} < 1 \Leftrightarrow a > 0$, alors la série converge. **(0,5 Pt)**
Si $e^{-a} > 1 \Leftrightarrow a < 0$, alors la série diverge. **(0,5 Pt)**
Si $e^{-a} = 1$, alors $a = 0$. **(0,5 Pt)** Dans ce cas , on a la série numérique $\sum \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ qui diverge car

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (\mathbf{0,5Pt})$$

et $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (série de Riemann). **(0,5 Pt)**

2) $\sum(-1)^n(n^{1/n^2} - 1)$

On remarque que

$$\left|(-1)^n(n^{1/n^2} - 1)\right| = n^{1/n^2} - 1 = e^{\frac{\ln(n)}{n^2}} - 1. \quad (\mathbf{0,5Pt})$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n^2} = 0$, **(0,25 Pt)** et sachant que le DL de e^x est $e^x = 1 + x + o(x)$, **(0,5 Pt)** alors

$$e^{\frac{\ln(n)}{n^2}} - 1 \sim \frac{\ln(n)}{n^2}. \quad (\mathbf{0,5Pt})$$

D'autre part, on sait que $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$ est convergente (série de Bertrand), **(0,5 Pt)** donc par le critère d'équivalence $\sum(n^{1/n^2} - 1)$ converge **(0,5 Pt)** et donc $\sum(-1)^n(n^{1/n^2} - 1)$ converge absolument donc elle converge. **(0,25 Pt)**

Exercice 2. (6 Pts)

On a $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2 - 1}$.

1) Le Rayon de convergence R est donné par

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2 - 1}.\frac{n^2 - 1}{(-1)^n}\right| = 1 \Rightarrow R = 1. \quad (\mathbf{1Pt})$$

2) Pour $x = 1$, on a la série numérique $\sum \frac{(-1)^n}{n^2 - 1}$ qui converge par le critère de Leibniz (le terme $\frac{1}{n^2-1}$ est décroissant et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2 - 1} = 0$). **(1 Pt)**

Pour $x=-1$, on a la série numérique $\sum \frac{1}{n^2-1}$ qui converge car $\frac{1}{n^2-1} \sim \frac{1}{n^2}$ avec $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. **(1 Pts)** Ainsi, le domaine de convergence D est

$$D=[-1,+1]. \quad (\mathbf{0,5Pt})$$

3) La somme :
Pour $x=0$, on a $f(0)=0$ On remarque que

$$\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{(n-1)(n+1)}=\frac{1/2}{n-1}-\frac{1/2}{n+1}.$$

Ainsi, pour $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n x^n}{n^2-1} &= \frac{1}{2}\left[\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n x^n}{n-1}-\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n x^n}{n+1}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[x\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n x^{n-1}}{n-1}-x^{-1}\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[x\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1} x^{n}}{n}-x^{-1}\sum_{n\geq 3}\frac{(-1)^{n-1} x^{n}}{n}\right] \\
= \frac{1}{2}&\left[x\ln(1+x)-\frac{1}{x}\left(\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}\right)\right]. \quad (\mathbf{2,5Pts})
\end{aligned}$$

Exercice 3. (8 Pts)

1) On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \geq 0$,

$$\left|\frac{\arctan(x^{n+1})}{n(n+1)}\right| \leq \frac{\pi}{2(n(n+1)} \leq \frac{\pi}{2n^2}. \quad (\mathbf{0,5Pt})$$

Puisque la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, alors $\sum u_n(x)$ converge normalement sur $[0,+\infty[$. **(0,5 Pt)**

2) Puisque $u_n(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$ et la série $\sum u_n(x)$ converge normalement donc uniformément sur $[0,+\infty[$, alors par le théorème du cours, $S(x)=\sum u_n(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$. **(0,5 Pt)**

3) On a $\forall x \in]0,+\infty[$,

$$S(x)+S(\frac{1}{x})=\sum_{n\geq 1}\left[\frac{\arctan(x^{n+1})}{n(n+1)}+\frac{\arctan(\frac{1}{x^{n+1}})}{n(n+1)}\right]$$

$$=\sum_{n\geq 1}\left[\arctan(x^{n+1})+\arctan(\frac{1}{x^{n+1}})\right]\frac{1}{n(n+1)}.$$

Sachant que

$$\forall t>0, \quad \arctan(t)+\arctan(\frac{1}{t})=\frac{\pi}{2},$$

alors

$$S(x)+S(\frac{1}{x})=\frac{\pi}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}. \quad (\mathbf{1Pt})$$

D'autre part, on sait que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1-\frac{1}{n+1}.$$

Donc,

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{n+1}) = 1.$$

Ainsi,

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad S(x)+S(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}. \quad (\mathbf{1Pt})$$

4) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n(x)$ est dérivable sur $[0,1[$ et $\forall x\in[0,1[$, on a

$$u_n'(x) = \frac{1}{n(n+1)}\left(\frac{(n+1)x^n}{1+x^{2(n+1)}}\right) = \frac{x^n}{n(1+x^{2n+2})}. \quad (\mathbf{0,5Pt})$$

Soit $a\in[0,1[$ fixé, on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $\forall x\in[0,a[$,

$$|u_n'(x)| \leq \frac{x^n}{n} \leq x^n \leq a^n. \quad (\mathbf{0,5Pt})$$

Puisque $0<a<1$, alors $\sum a^n$ converge donc $\sum u_n'(x)$ converge normalement donc uniformément sur tout $[0,a], a\in[0,1[$. **(0,5 Pt)**
Par le théorème de dérivation du cours, la fonction S est dérivable sur $[0,1[$. $(\mathbf{0,25Pt})$
5) On a

$$\forall x\in[0,1[, \quad S'(x) = \sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n(1+x^{2n+2})}.$$

Remarquons que $S'(0)=0$, **(0,25 Pt)** donc $\forall x\in[0,1[$, $S'(x)\geq 0$. Ainsi, S est croissante. **(0,5 Pt)**
Maintenant, on a pour tout $x\in[0,1[$,

$$\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n(1+x^{2n+2})} \geq \sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{2n} = -\frac{1}{2}\ln(1-x). \quad (\mathbf{1Pt})$$

Puisque $\lim\limits_{x\to 1^-} -\frac{1}{2}\ln(1-x) = +\infty$, alors

$$\lim_{x\to 1^-} S'(x) = +\infty. \quad (\mathbf{1Pt})$$