Département de Mathématiques - Faculté des Sciences - Université UABB Tlemcen 03-12-2023

Contrôle Continu Algèbre 3 Durée : 1h30'

<u>Exercice 1 (13 points)</u> Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ canoniquement associé à la matrice A donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$$

1- Donner une base de Im(f). Expliquer.
2- Déduire dim Ker(f).
3- Les sous espaces Ker(f) et Im(f) sont-ils stables par f ? Justifier.
4- Trouver $\boldsymbol{\lambda}$ non nulle en résolvant le système $Au = \boldsymbol{\lambda u}$ avec u vecteur propre associé à $\boldsymbol{\lambda}$.
5- Déduire le spectre de f.
6- L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Justifier.
7- Ecrire le polynôme caractéristique puis déduire, en justifiant, le polynôme minimal de f.

<u>Exercice 2 (7 points)</u>

Soit la matrice carrée :

$$A = \begin{pmatrix} m^2 & m(m+2) \\ 0 & 2-m^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \text{ avec } \boldsymbol{m} \in \mathbb{R}.$$

1- Déterminer $\boldsymbol{m}$ pour que le polynôme minimal de A ait des racines simples.
2- Calculer dans ce cas A^n, $n \in \mathbb{N}$.
3- Trouver quatre sous espaces de $\mathbb{R}^2$ stables par l'endomorphisme auquel est associé A.

CC Algèbre 3 (1)

Exo 1 $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5)$

13pts

$$\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R})$$

1) Une base de $\mathrm{Im}(f)$.

$\mathrm{Im}(f) = f(\mathbb{R}^5) = \mathrm{vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4), f(e_5))$

$= \mathrm{vect}(f(e_1), f(e_5))$

1pt $= \mathrm{vect}(e_5, e_1+e_2+e_3+e_4+e_5)$

$= \mathrm{vect}(e_5, e_1+e_2+e_3+e_4)$

Les vecteurs e_5 et $e_1+e_2+e_3+e_4$ sont libres puisque le mineur $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ dans $\begin{array}{cc} e_5 & e_1+e_2+e_3+e_4 \end{array}$ $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ vaut $-1 \neq 0$

Donc une base de $\mathrm{Im}(f)$ est $\{e_5, e_1+e_2+e_3+e_4\}$

2) dim Ker(f)

Th du rang : $\dim \mathbb{R}^5 = \dim \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{rg}(f)$

1pt $\Leftrightarrow \dim \mathrm{Ker}(f) = \dim \mathbb{R}^5 - \mathrm{rg}(f)$

$= 5 - 2 = 3.$

$\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im}(f) = 2$

3) Ker(f) et Im(f) stables par f ??

- soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f(f(x)) = f(0) = 0$

1pt $\Rightarrow f(x) \in \mathrm{Ker}(f)$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}(f)$ stable par f.

- Soit $x \in \mathrm{Im}(f) \Rightarrow x \in \mathbb{R}^5$ (car $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^5$)

$\Rightarrow f(x) \in \mathrm{Im}(f) \Rightarrow \mathrm{Im}(f)$ stable par f.

1pt

4) λ? / $Au = \lambda u$, u vect. propre (2)

soit $u = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$

$$Au = \lambda u \iff \begin{cases} x_5 = \lambda x_1 \\ x_5 = \lambda x_2 \\ x_5 = \lambda x_3 \\ x_5 = \lambda x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = \lambda x_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{\lambda} x_5 \\ \lambda \neq 0. \end{cases}$$

1pt

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{4}{\lambda} + 1\right) x_5 = \lambda x_5$$

$$\Rightarrow \left(\frac{4}{\lambda} + 1 - \lambda\right) x_5 = 0$$

1pt

$$\Rightarrow \frac{4}{\lambda} + 1 - \lambda = 0 \text{ car } x_5 \neq 0 \ (u \neq 0)$$

1pt $\Rightarrow -\lambda^2 + \lambda + 4 = 0$, $\lambda \neq 0$.

1pt $\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$

5) $Sp(A)$.

$rg(A) = 2 < 5 \Rightarrow 0$ est valeur propre de A

1pt $Sp(A) = \left\{ \frac{1-\sqrt{17}}{2}, 0, \frac{1+\sqrt{17}}{2} \right\}$

6) f diagonalisable ?

On a $\dim \mathrm{Ker}(f) = 3$ et 0 est vp de f (ou de A)

donc $\dim E_0(A) = \dim \mathrm{Ker}(A) = 3 \leq m(0)$

2pts

On a 2 autres valeurs propres λ_1 et λ_2 (question 4)

Donc $m(\lambda_1) = m(\lambda_2) = 1$.

On conclut que $m(0) = 3$.

Et par suite $\dim E_0(A) + \dim E_{\lambda_1}(A) + \dim E_{\lambda_2}(A) = 5$

$\Rightarrow A$ diagonalisable.

7) Poly. caract. + poly. minimal de f.

1pt $P_A(x) = -x\left(x - \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$

Puisque A est diagonalisable alors le poly. minimal $M_A(x)$ est à racines simples $\Rightarrow$ $M_A(x) = x\left(x - \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$ 1pt

Exo 2

7 pts

$$A = \begin{pmatrix} m^2 & m(m+2) \\ 0 & 2-m^2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}), \ m \in \mathbb{R}$$

3

1) m? Le poly. minimal de A ait des racines simple

$Sp(A) = \{m^2, \ 2-m^2\}$ car A est triangulaire supérieure

- Si m^2 et $2-m^2$ sont 2 v.p distinctes alors A est diago $\Leftrightarrow$ $M_A(x)$ a des racines simple.

1pt D'où : $m^2 = 2-m^2 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = 1$ ou $m = -1$

Donc si $m \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ alors A diago, donc $M_A(x)$ a des racines simple.

- Si $m = 1$ ou $m = -1$ alors $Sp(A) = \{1\}$

avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ si $m = 1$

et $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ si $m = -1$

1pt Dans les 2 cas A possède une valeur propre et elle n'est pas scalaire donc non diagonalisable donc son polynôme minimal n'a pas de racines simples.

2) $A^n = ?$ $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n \geq 2$, $x^n = M_A(x) Q_n(x) + a_n x + b_n$

$\Rightarrow A^n = a_n A + b_n I_2$

1pt $\begin{cases} \text{si } x = m^2 \text{ alors } m^{2n} = a_n m^2 + b_n \\ \text{si } x = 2-m^2 \text{ alors } (2-m^2)^n = a_n(2-m^2) + b_n \end{cases}$

D'où : $m^{2n} - (2-m^2)^n = a_n(2m^2 - 2)$

Soit : 1pt $\begin{cases} a_n = \dfrac{m^{2n} - (2-m^2)^n}{2(m^2-1)} \\ b_n = m^{2n} - \dfrac{m^{2n} - (2-m^2)^n}{2(m^2-1)} m^2 \end{cases}$

1pt si $n = 0$ alors $A^0 = I_2$

si $n = 1$ alors $A^1 = A$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $A^n = a_n A + b_n I_2$

3) Les 4 sous espaces vect. de $\mathbb{R}^2$ stables :

Si $m \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ alors A possède 2 v.p. distincts donc A est diagonalisable.

Dans ce cas il y a 2^2 sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ stables par l'endomorphisme auquel est associé A.

Les $2^2 = 4$ sous espace vect. sont :

$E_{m^2}(A)$, $E_{2-m^2}(A)$, $\{\vec{0}\}$ et $\mathbb{R}^2$.

0,5 0,5 0,5 0,5