Les intégrales

Université de Tlemcen
Faculté des Sciences

March 20, 2024

1 Intégrale indéfinie et ses propriétés

Soit $f(x)$ une fonction continue sur un intervalle donné. L'intégrale indéfinie de $f(x)$, notée $\int f(x)\,dx$, est définie comme:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Où $F(x)$ est une fonction dont la dérivée est égale à $f(x)$, c'est-à-dire $F'(x) = f(x)$, et C est une constante arbitraire.

1.1 Définition d'une primitive

Une primitive d'une fonction est une fonction dont la dérivée est égale à la fonction donnée. Formellement, soit $f(x)$ une fonction définie sur un intervalle I. Une fonction $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ sur I si sa dérivée est égale à $f(x)$ pour tout x dans I, c'est-à-dire si $F'(x) = f(x)$ pour tout x dans I.

En notation mathématique, cela se note :

$$F'(x) = f(x)$$

Une primitive de $f(x)$ est souvent notée $\int f(x)\,dx$ et est appelée intégrale indéfinie de $f(x)$.

Formules fondamentales d'intégration :

Fonction	Primitive
$\int k\,dx$	$kx + C$ (où k est une constante)
$\int x^n\,dx$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ (pour tout $n \neq -1$)
$\int e^x\,dx$	$e^x + C$
$\int \frac{1}{x}\,dx$	$\ln\lvert x\rvert + C$ (pour $x \neq 0$)
$\int \sin(x)\,dx$	$-\cos(x) + C$
$\int \cos(x)\,dx$	$\sin(x) + C$
$\int \tan(x)\,dx$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	$\arcsin(x) + C$
$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$	$\arctan(x) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx$	$\tan(x) + C$
$\int \frac{1}{\sin^2(x)}\,dx$	$-\cot(x) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$	$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$ (pour $\lvert x\rvert < \lvert a\rvert$)
$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx$	$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx$	$\ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + C$
$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$	$\frac{1}{a}\ln\left\lvert\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right\rvert + C$ (pour $x > a$)
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$	$\cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$ (pour $x > a$)
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx$	$\cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$ (pour $\lvert x\rvert < \lvert a\rvert$)

2 Intégration par Parties

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

où u est une fonction que vous choisissez pour dériver (et qui est généralement plus facile à intégrer), et dv est une fonction que vous choisissez pour intégrer (et qui est généralement plus difficile à intégrer).

2.1 Intégration par changement de variables

Voici les étapes à suivre pour effectuer un changement de variable et simplifier une intégrale :

1. Choix de la variable de substitution : Identifiez la partie complexe de l'intégrale et choisissez une variable de substitution appropriée.

2. Calcul de du : Calculez du en fonction de dx après avoir choisi la variable de substitution u.

3. Remplacement de la variable et de dx : Remplacez u dans l'intégrale et dx par l'expression trouvée pour du.

4. Intégration par rapport à u : Intégrez la nouvelle intégrale par rapport à u pour la rendre plus gérable.

5. Retour à la variable d'origine : Réexprimez le résultat en fonction de la variable d'origine x après l'intégration par rapport à u.

6. Inclure la constante d'intégration : N'oubliez pas d'inclure la constante d'intégration C à la fin du résultat.

3 Intégration des fonctions rationnelles

Soit $f(x)$ une fonction rationnelle définie par $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes et $Q(x)$ n'est pas identiquement nul.

L'objectif de l'intégration des fonctions rationnelles est de trouver une primitive de $f(x)$ en utilisant la méthode d'intégration par éléments simples. Cette méthode consiste à décomposer $f(x)$ en une somme de fractions simples, puis à intégrer chaque terme séparément.

3.1 Intégration par éléments simples

Pour intégrer une fonction rationnelle, nous commençons par décomposer $f(x)$ en éléments simples de la forme $\frac{A}{(x-\alpha)}$, où α est une racine de $Q(x)$ et A est une constante à déterminer.

3.2 Intégration des fractions rationnelles

Après avoir décomposé une fonction rationnelle en éléments simples, nous intégrons chaque terme séparément pour obtenir la primitive de $f(x)$.

4 Intégration des fonctions exponentielles et trigonométriques

4.1 Intégration des fonctions exponentielles

L'intégration des fonctions exponentielles est généralement directe. Par exemple, pour e^x, on a :

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

Pour les fonctions de la forme a^x avec $a > 0$, on utilise un changement de variable. Par exemple, pour a^x :

$$\int a^x \, dx = \frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x + C$$

4.2 Intégration des fonctions trigonométriques

Pour les fonctions $\int \sin^n(x) \cos^m(x) \, dx$, on utilise des changements de variable avec $\sin(x)$ ou $\cos(x)$.

Pour des expressions plus complexes $\int f(\sin(x), \cos(x), \tan(x))\, dx$, on peut utiliser $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, avec les relations :

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt.$$

5 Intégration définie

Définition 5.1 *Soit $a < b \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $[a, b]$, avec F une primitive de f. Alors :*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

est appelée intégrale définie de a à b.

Le résultat d'une intégration définie est un nombre constant, non une fonction.