Systèmes d'équations linéaires

Université de Tlemcen
Faculté des Sciences

February 27, 2024

1 Systèmes d'équations linéaires

Définition 1.1 *On appelle système d'équations linéaires de m équations en n inconnues un système de la forme:*

$$(S_1) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

1.1 Écriture matricielle

Le système (S_1) peut être écrit sous forme matricielle $AX = B$, où :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

1.2 Rang d'un système d'équations linéaires

Le rang d'un système est le rang de la matrice A.

2 Étude de l'ensemble des solutions

2.1 Déterminant caractéristique

Le déterminant caractéristique d'un système est un déterminant formé à partir des coefficients du système.

2.2 Étude de l'ensemble des solutions

1. Si $r = m = n$, le système admet une seule solution.

2. Si $r < m < n$, le système est indéterminé.

3. Si $r < m$ et si au moins un déterminant caractéristique est non nul, le système n'a pas de solution.
4. Si $r < m$ et si tous les déterminants caractéristiques sont nuls, le système se réduit et peut être résolu.

2.3 Systèmes équivalents

Deux systèmes sont équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.

2.4 Systèmes échelonnés

Un système est triangulaire s'il a autant d'inconnues que d'équations et si tous les coefficients en dessous de la diagonale sont nuls. Il est échelonné réduit s'il est triangulaire avec des coefficients diagonaux non nuls.

3 Méthodes de résolution

3.1 Méthode de substitution

Choisir une équation, exprimer une inconnue en fonction des autres et substituer cette expression dans les autres équations.

3.2 Méthode de Cramer

Pour un système carré avec une unique solution, on peut utiliser les déterminants des matrices associées.

3.3 Méthode de la matrice inverse

Si la matrice du système est inversible, on peut trouver la solution en multipliant par l'inverse de la matrice.

3.4 Méthode de Gauss

Par une série d'opérations élémentaires, transformer le système en un système échelonné ou échelonné réduit, puis résoudre. Ces méthodes permettent de résoudre n'importe quel système d'équations linéaires.