Matrices et déterminants

Université de Tlemcen
Faculté des Sciences

February 9, 2024

1 Matrices (Définition, opération)

1.1 Définitions

- Une matrice A de type (m, n) ou m lignes et n colonnes est un tableau rectangulaire d'éléments de $\mathbb{K}$.
- Les nombres du tableau sont appelés les coefficients de A.
- Le coefficient situé à la i-ème ligne et à la j-ème colonne est noté a_{ij}.
- Un tel tableau est représenté de la manière suivante:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ou } A = (a_{ij}) \quad \text{avec} \quad 1 \leq i \leq m \quad \text{et} \quad 1 \leq j \leq n.$$

On dit que la matrice A est de taille $m \times n$ (lire : "m croix n") (respecter l'ordre de lecture).

- On note $M_{mn}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de taille $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.
  $M_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coeffcients dans $\mathbb{K}$.
- Les éléments de $M_{mn}(\mathbb{R})$ sont appelés **matrices réelles**.
- **Deux matrices sont égales** lorsqu'elles ont la même taille et que les coefficients correspondants sont égaux.

1.2 Matrices particulières

1 **Les matrices colonnes**, sont les matrices à une colonne $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ donc de taille $m \times 1$

2 **Les matrices lignes**, sont les matrices à une seule ligne $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \end{pmatrix}$.

3 **La matrice nulle** est la matrice dont tous les éléments sont nuls. On la note 0_{mn}.

4 **Les matrices carrés** sont les matrices dont le nombre de lignes est égale au nombre de colonnes. Ce nombre s'appelle l'ordre de la matrice.

Les coefficients ayant même indice de ligne et de colonne s'appellent **les coeffcients diagonaux**. Exemple : $a_{11}, a_{22}, a_{33}, ...$

5 **Les matrices triangulaires inférieures**, sont les matrices carrées dont tous les coefficients strictement au dessus de la diagonale (c'est-à-dire d'indices ij avec $j > i$) sont nuls.

6 **Les matrices triangulaires supérieures**, sont les matrices carrées dont tous les coefficients strictement au dessous de la diagonale (c'est-à-dire d'indices ij avec $j < i$) sont nuls.

7 **Les matrices diagonales**, sont les matrices carrées à la fois triangulaires supérieures et triangulaires inférieures. Les seuls éléments non nuls sont ceux de la diagonale.

8 **La matrice identité** est la matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux valent 1. On note I_n la matrice identité d'ordre n.

9 Une matrice carré d'ordre n telle que $a_{ii} = a \in \mathbb{K},\ 1 \leq i \leq n$ et $a_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$ est dite **matrice scalaire**.

2 Opérations sur les matrices

Addition des matrices

Somme de deux matrices: Soient $A = (a_{ij})$ avec $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$ et $B = (b_{ij})$ avec $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$ deux matrices ayant la même taille mXn. Leur somme $C = A + B$ est la matrice de taille mXn définie par:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Proposition 2.1 *Soient A, B et C trois matrices de $M_{mn}(\mathbb{K})$:*

- *L'addition est **associative**: $(A + B) + C = A + (B + C)$.*

- *La matrice nulle à m lignes et n colonnes est un élément neutre pour l'addition:*
  $A + 0 = A$.

- *Toute matrice A admet* ***un symétrique ou "opposée"*** $(-A)$.
  En posant $A = (a_{ij})$ avec $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$ et $-A = (-a_{ij})$ avec $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$, on a $A + (-A) = 0$.

- *L'addition est* ***commutative****: $A + B = B + A$.*

- *On note $A - B$ la somme $A + (-B)$.*

Produit d'une matrice par un élément de $\mathbb{K}$

Soient $A = (a_{ij})$ avec $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$), alors $\lambda A = (\lambda a_{ij})$ avec $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$.

Proposition 2.2 *Soient λ et μ deux éléments de $\mathbb{K}$ et A et B deux matrices de M_{mn}, alors:*

- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.
- $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.
- $1A = A$.

Produit de deux matrices:

Le produit AB de deux matrices A et B est défini si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.
Soients $A = (aij)_{m,n}$ et $B = (bij)_{n,p}$: Le produit de A et B est une matrice de type (m, p).

$$A \times B = (c_{mp}) \text{ telle que } c_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Propriétés

Soient $n, m, p, q \in \mathbb{N}^*$

- **Associativité.** Soit $A \in M_{mn}$, $B \in M_{np}$ et $C \in M_{pq}$, alors

  $$(AB)C = A(BC)$$

  .

- **Rôle des matrices identité.** $A \in M_{mn}$:

$$AI_n = A \quad \text{et} \quad I_m A = A$$

.

- **Distributivité par rapport à l'addition.**
Si A et B sont deux matrices de $M_{mn}(\mathbb{K})$ et $C \in M_{np}(\mathbb{K})$, alors

$$(A+B)C = AC + BC$$

.

Si $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$ et si B et $C \in M_{np}(\mathbb{K})$, alors

$$A(B+C) = AB + AC$$

.

- **Compatibilité avec le produit externe.** Si $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$ et si $B \in M_{np}(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ alors

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

- **Puissance d'une matrice.** Dans l'ensemble $M_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées de taille nXn à coefficients dans $\mathbb{K}$, la multiplication des matrices est une opération interne:

$$\text{Si} \quad A, B \in M_n(\mathbb{K}) \quad \text{alors,} \quad AB \in M_n(\mathbb{K})$$

. En particulier, on peut multiplier une matrice carrée par elle-même, on note :

$$A^2 = A \times A, A^3 = A \times A \times A$$

. On peut ainsi définir les puissances successives d'une matrice.

Définition 2.3 *Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, on définit les puissances successives de A par*
$A^0 = I$ *et*
$A^{p+1} = A^p \times A$*, pour tout* $p \in \mathbb{N}$*.*
Autrement dit, $A^p = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{p \text{ facteurs}}$

Transposée d'une matrice

Soit $A = (a_{ij}) \quad \text{avec} \quad 1 \leq i \leq m \quad \text{et} \quad 1 \leq j \leq n$, on appelle **transposé de** A et on note ${}^tA$ la matrice à n lignes et m colonnes

$${}^tA = (a_{ji}) \quad \text{avec} \quad 1 \leq j \leq n \quad \text{et} \quad 1 \leq i \leq m$$

.

Proposition 2.4 *Soit A et B deux matrices de $M_{mn}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors,*

- ${}^t({}^tA) = A$
- ${}^t(\lambda A) = \lambda\ {}^tA$
- ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
- ${}^t(AB) = {}^tB\ {}^tA$

Trace d'une matrice

La **trace** de la matrice A est le nombre obtenu en **additionnant les éléments diagonaux de A**. Autrement dit,

$$trA = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

Theorem 2.5 *Soient A et B deux matrices $n \times n$. Alors:*

- $tr(A+B) = trA + trB$
- $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$
- $tr({}^tA) = tr(A)$
- $tr(AB) = tr(BA)$

Définition 2.6 *Une matrice A de taille $n \times n$,*

- *A est dite* ***symétrique****, si elle est égale à sa transposée. C'est à dire ${}^tA = A$*
- *A est dite* ***antisymétrique****, si ${}^tA = -A$*

Inverse d'une matrice

Définition 2.7 *Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. S'il existe une matrice carrée B de taille n telle que :*

$$AB = BA = I,$$

on dit que A est ***inversible****.*

- *On appelle B l'inverse de A et on la note A^{-1} .*
  Quand A est inversible pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note :

$$A^{-p} = (A^{-1})^p = \underbrace{A^{-1} \times A^{-1} \times \cdots \times A^{-1}}_{p \ facteurs}$$

- *L'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$.*

Proposition 2.8 • *Si A est inversible, alors son inverse est unique.*

- *Soit A une matrice inversible. Alors A 1 est aussi inversible et on a :*
  $(A^{-1})^{-1} = A$.
  $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
  ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$

- *Soient A et B deux matrices inversibles de même taille. Alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

- *Soient A; B et C trois matrices de $M_n(\mathbb{K})$. Alors l'égalité $AC = BC$ implique l'égalité $A = B$.*

Inverse d'une matrice : calcul

Nous allons voir une méthode pour calculer l'inverse d'une matrice quelconque de manière efficace. Nous commençons par une formule directe dans le cas simple des matrices 2×2.

<u>**Matrice** 2×2</u>: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Si $ad - bc \neq 0$ alors A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Déterminant d'une matrice

1) Si $A = (a_{11}) = a_{11}$.
Le déternimant de A est un nombre réel ou complexe noté $det(A) = a_{11}$.

2) Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

En développement par rapport à la première colonne. Le déternimant de A est un nombre réel ou complexe noté:

$$det(A) \quad ou \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} + & - \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{array} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

.

3) Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Le déternimant de A est:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{array} = +a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

.

4) Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K}),\ n \geq 2.$

$$det(A) = \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{i+j}\ a_{ij}\ det(M_{ij}).$$

On note $M_{ij} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ la matrice obtenue en retirant la ième ligne et la jème colonne à la matrice A.

Propriétés:

- $det(AB) = det(A)det(B), \quad A,\ B\ \in M_n(\mathbb{K})$.
- $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}, \quad det(A) \neq 0$.
- Si tous les éléments d'une ligne (colonne) d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ sont nuls alors, $det(A) = 0$.
- Si tous les éléments d'une ligne (colonne) du déterminant d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ sont multiplié par un scalaire k, alors le déterminant est multiplié par k.
- Si B est obtenue à partir de $A \in M_n(\mathbb{K})$ en échangeant deux de ces lignes (colonnes), alors : $det(A) = -det(B)$.
- Si deux lignes (colonnes) de $A \in M_n(\mathbb{K})$ sont identiques, alors $det(A) = 0$.

Comatrice d'une matrice $(n \times n)$

Comatrice de la matrice $A = (a_{ij})_{n,n}$, notée $com(A)$ et

$$com(A) = ((-1)^{i+j} det(M_{ij})_{n,n}$$

tel que $M_{ij} \in M_n(\mathbb{K})$ la matrice obtenue en retirant la ième ligne et la jième colonne à la matrice A.

Inverse d'une matrice $(n \times n)$

L'inverse de la matrice A notée A^{-1} telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, est:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\ \ {}^{t}(com(A)).$$

Remarque 2.9 *A est inversible si et seulement si $det(A) \neq 0$.*

Matrices semblables

Définition 2.10 *Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$. On dit que la matrice B est semblable à la matrice A s'il existe une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{K})$ telle que*

$$B = P^{-1}AP$$

2.1 Matrice associée à une application linéaire

2.1.1 Applications linéaires

On dit que l'application $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire ($f \in$ Ł$(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, si $\forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a:

$$f(\alpha X + \beta Y) = \alpha f(X) + \beta f(Y).$$

Définition 2.11 *Une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une expression qui transforme un vecteur $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ en un vecteur $Z = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$ de $\mathbb{R}^m$ où chaque composante z_i est donnée par une combinaison linéaire des coordonnées x_i.*
C'est-à-dire qu'il existe des constantes a_{ij} telles que :

$$f : X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto Z = \begin{pmatrix} Z_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ Z_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ Z_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \\ \vdots \\ Z_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

2.1.2 Matrice associée

Une application linéaire f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est uniquement déterminée par un tableau A à m lignes et n colonnes de coefficients

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

où a_{ij} est l'élément de A situé sur la ième ligne et jième colonne de A.

Définition 2.12 *A s'appelle la matrice de l'application linéaire f, et on écrit $A = M_f$. (La matrice associée a l'application f.)*

On remarque que

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= AX, \quad X \in \mathbb{R}^n$$

2.2 Application linéaire associée à une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ une matrice donnée.

L'application linéaire associée à la matrice A est définie par

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$