Algèbre lineaire

Université de Tlemcen
Faculté des Sciences

January 25, 2024

1 Espaces vectoriels

Définition 1.1 *Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un ensemble muni de deux lois de composition, l'une interne notée $\oplus$ et l'autre externe notée $\otimes$ définie par:*

- $$\begin{aligned} \oplus : E \times E &\longrightarrow E \\ (x, y) &\longrightarrow x \oplus y, \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \otimes : E \times \mathbb{K} &\longrightarrow E \\ (x, \alpha) &\longrightarrow \alpha \otimes x. \end{aligned}$$

E est dit espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et on note $\mathbb{K}$ e.v si et seulement si:

1. *$u \oplus v = v \oplus u$ (pour tous $u, v \in E$).*
2. *$u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w$ (pour tous $u, v, w \in E$).*
3. *Il existe un élément neutre $0_E \in E$ tel que $u \oplus 0_E = u$ (pour tout $u \in E$).*
4. *Tout $u \in E$ admet un symétrique u' tel que $u \oplus u' = 0_E$. Cet élément u' est noté $-u$.*
5. *$\forall u \in E : 1 \otimes u = u$.*
6. *$\forall u \in E, \forall a, b \in \mathbb{K} : a \otimes (b \otimes u) = (a.b) \otimes u$ (. désigne la multiplication usuelle).*
7. *$\forall u \in E, \forall a, b \in \mathbb{K} : (a + b) \otimes u = (a \otimes u) \oplus (b \otimes u)$ (+ désigne l'addition usuelle).*
8. *$\forall u, v \in E, \forall a \in \mathbb{K} : a \otimes (u \oplus v) = (a \otimes u) \oplus (a \otimes v)$.*

Les éléments de E sont appelés **vecteurs**, *et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés* **scalaires**

Exemple 1.2 *On munit $\mathbb{R}^2$ des deux règles de calcul:*

$$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2 : (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha.(x, y) = (\alpha x, \alpha y),$$

où + et . sont l'addition et la multiplication usuelles. Muni de ces deux lois, $(\mathbb{R}^2, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Plus généralement $\mathbb{R}^n$, muni des deux lois

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

et

$$\alpha.(x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$$

est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Proposition 1.3 *Soit $(E, \oplus, \otimes)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

1. $\forall u \in E : 0 \otimes u = 0_E$ *(0_E l'élément neutre de E).*
2. $\forall \alpha \in \mathbb{K} : \alpha \otimes 0_E = 0_E$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u \in E : \alpha \otimes (-u) = (-\alpha) \otimes u = -\alpha \otimes u.$
4. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u \in E : \alpha \otimes u = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ *ou* $u = 0_E$.

2 Sous espaces vectoriels

Définition 2.1 *Une partie non vide F d'un $\mathbb{K}$.e.v E muni des deux lois + et . est un sous espace vectoriel de E, et on note F s.e.v de E si et seulement si:*

1. $F \neq \emptyset$.
2. $\forall u, v \in F, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \alpha u + \beta v \in F$.

Exemple 2.2 *Montrons que*

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:

1. $E_1 \neq \emptyset$, *car* $(0, 0, 0) \in E_1$.
2. $\forall u = (x, y, z) \in E_1, \forall v = (x', y', z') \in E_1, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} :$

   $$\lambda u + \mu v = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z').$$

   Or,

   $$(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') - (\lambda z + \mu z') = \lambda \underbrace{(x + y - z)}_{=0} + \mu \underbrace{(x' + y' - z)}_{=0} = 0.$$

   car $u = (x, y, z) \in E_1$ *et* $v = (x', y', z') \in E_1 \Rightarrow \lambda u + \mu v \in E_1$.

Conclusion: *E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.*

Proposition 2.3 *Chaque s.e.v d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E contient 0_E.*

3 Famille libre, liée

Définition 3.1 *n vecteurs $v_1, v_2, ..., v_n$ non nuls de E sont linéairements indépendants (libres) si et seulement si*

$$\forall a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{K} : (a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n = 0) \Rightarrow (a_1 = a_2 = ... = a_n = 0).$$

Exemple 3.2 *Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$. Montrons qu'ils sont linéairement indépendants :*

$$\begin{aligned} a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 &= a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1) \\ &= (0, 0, 0) \implies \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, la famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est linéairement indépendante.

Définition 3.3 *Les n vecteurs $v_1, v_2, ..., v_n$ de E sont linéairements dépendants (liés) si et seulement si l'équation*

$$a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n = 0,$$

admet au moins une solution $a_i \neq 0$.

Exemple 3.4 *Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, et $u_3 = (1, 2, 1)$. Montrons qu'ils sont liés :*

$$\begin{aligned} a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 &= a_1(1, 1, 0) + a_2(0, 1, 1) + a_3(1, 2, 1) \\ &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_3 & = 0 \\ a_1 + a_2 + 2a_3 & = 0 \\ a_2 + a_3 & = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 & = -a_3 \\ a_2 & = -a_3 \end{cases}$$

Donc la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est liée (On peut remarquer que $u_3 = u_1 + u_2$. Ce qui entraîne que la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est liée).

Définition 3.5 *Soient E un $\mathbb{K}$.e.v et $v_1, v_2, ..., v_n$, n vecteurs de E. On appelle combinaison lináire des vecteurs $v_1, v_2, ..., v_n$, toute expression de la forme*

$$\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + ... + \alpha_nv_n,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ sont les coefficients de la combinaison linéaire.

4 Bases et dimension d'un e.v

Définition 4.1 *Une famille $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ est dite génératrice de E si et seulement si*

$$\forall v \in E, \exists \alpha_i \in \mathbb{K} \text{ tels que } v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n,$$

c'est à dire:

$$E = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i / \alpha_i \in \mathbb{K}\},$$

et on écrit, $E = lin\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ ou bien $E = Vect\{v_1, v_2, ..., v_n\}$.

Exemple 4.2 *Soit $E = \{(x+y, y-3x, x) \in \mathbb{R}^3 | x, y \in \mathbb{R}\}$.*
Pour $u \in E \Rightarrow u = (x+y, y-3x, x) = (x, -3x, x) + (y, y, 0) = x(1,-3,1) + y(1,1,0)$.
Donc {(1,-3,1),(1,1,0)} est une famille génératrice de E.

Définition 4.3 *On appelle base d'un e.v E toute famille libre et génératrice de E.*

Exemple 4.4 *La famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ avec $\{e_1 = (1,0,0)), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On a déjà montrer qu'elle est libre. Montrons qu'elle génératrice:*
Pour $u \in \mathbb{R}^3$ on a: $u = (x,y,z) = (x,0,0) + (0,y,0) + (0,0,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$.
Donc $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. Donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$ et elle s'appelle la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Définition 4.5 *Si $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est une base de l'e.v E alors E est de dimension finie n. On note $dim E = n$. On pose par convention $dim\{0_E\} = 0$.*

5 Application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Définition 5.1 *T de E dans F est dite linéaire si est seulement si:*

$$\forall u, v \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v).$$

Exemple 5.2 *$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application définie par $T(x,y) = (x+y, x-y)$.*
T est linéaire. En effet, soit $u = (x,y), v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ et soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$T(\alpha u + \beta v) = T(\alpha(x,y) + \beta(x',y')) = T(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y').$$

$$= (\alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y', \alpha x + \beta x' - \alpha y - \beta y').$$

$$= (\alpha(x+y) + \beta(x'+y'), \alpha(x-y) + \beta(x'-y')).$$

$$= (\alpha(x+y), \alpha(x-y)) + (\beta(x'+y'), \beta(x'-y')).$$

$$= \alpha(x+y, x-y) + \beta(x'+y', x'-y') = \alpha T(x,y) + \beta T(x',y') = \alpha T(u) + \beta T(v).$$

Proposition 5.3 *Si* T *de* E *dans* F *une application linéaire alors:*
1. $\forall u \in E : T(-u) = -T(u)$.
2. $T(0_E) = 0_F$.

Définition 5.4 *Soit* $T : E \longrightarrow F$ *une application linéaire. On appelle noyau de* T *l'ensemble noté* $kerT$ *défini par*

$$kerT = \{u \in E;\ T(u) = 0_F\}.$$

Définition 5.5 *Soit* $T : E \longrightarrow F$ *une application linéaire. On appelle image de* T *l'ensemble noté* ImT *défini par*

$$ImT = \{v \in F;\ v = \ T(u)\ avec\ u \in E\} = T(E).$$

Proposition 5.6 *Soit* $T : E \longrightarrow F$ *une application linéaire, alors* $kerT$ *est un s.e.v. de* E*, et* ImT *est un s.e.v. de* F*.*

Theorem 5.7 *Soit* $T : E \longrightarrow F$ *une application linéaire, alors:*
1. T *est injective* $\Longleftrightarrow kerT = \{0_E\}$.
2. T *est surjective* $\Longleftrightarrow ImT = F$.

Theorem 5.8 (Théorème Noyau-Image) *Soit* $T : E \longrightarrow F$ *une application linéaire, avec* $dimE = n$ *(finie) alors*

$$dimE = dimkerT + dimImT.$$

Proposition 5.9 *Si* $T : E \longrightarrow F$ *est linéaire et* $dimE = dimF = n$ *alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

- T *est bijective.*
- T *est injective.*
- T *est surjective.*

6 Rang d'une application linéaire

Définition 6.1 (Rang d'une application linéaire) *Soit* $T : E \longrightarrow F$ *une application linéaire. On appelle rang de* T *la dimension de* ImT*. On le note*

$$rgT = dimImT = dimT(E).$$