
Exercice 1

Dans chacune des questions suivantes, on donne un ensemble E et des parties A et B de E . Déterminer explicitement les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap C_E(B)$ ainsi que $C_E(A) \cap B$.

1. $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 4\}$.
2. $E = \mathbb{R}$, $A =]-\infty, 2]$, $B = [3, +\infty[$.

Exercice 2

Soit A un ensemble, et X , Y , et Z des parties de A . Démontrez les propriétés suivantes :

1. $C_A(X \cup Y) = C_A(X) \cap C_A(Y)$
2. $X \subset Y \Leftrightarrow C_A(Y) \subset C_A(X)$

Exercice 3:

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

Déterminez les ensembles suivants:

$$f([0, 1]), \quad f(\mathbb{R}), \quad f(]-1, 2]), \quad f^{-1}([1, 2]), \quad f^{-1}([-1, 1]), \quad f^{-1}(\{3\}).$$

Exercice 4:

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives?

1. f de \mathbb{R} dans $[0, +\infty[$ définie par $f(x) = x^2$.
2. g de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$ définie par $g(x) = x^2$.

Exercice 5:

Soit h l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $h(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$.

1. Vérifiez que pour tout réel a non nul, on a $h(a) = h(\frac{1}{a})$. L'application h est-elle injective?
2. Soit f définie sur $I = [1, +\infty[$ par $f(x) = h(x)$.
 - (a) Montrez que f est injective.
 - (b) Vérifiez que : $\forall x \in I, f(x) \leq 2$.
3. Montrez que f est une bijection de I sur $]0, 2]$ et trouvez f^{-1} .