Les fonctions réelles d'une variable réelle

Université de Tlemcen
Faculté des sciences

November 8, 2023

1 Généralités

1.1 Fonctions bornées

Définition 1.1 *On appelle fonction réelle d'une variable réelle, toute fonction de $\mathbb{R}$ ou d'un sous ensemble de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.*

Définition 1.2 *Soit $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $E \subset X$.*

1. *f est majorée dans $E \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E : f(x) \leq M$.*
2. *f est minorée dans $E \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in E : f(x) \geq m$.*
3. *f est bornée dans $E \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}, \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in E : m \leq f(x) \leq M$.*

1.2 Fonctions monotones

Définition 1.3 *Soit $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

1. *f est croissante dans E si $\forall x, y \in E : x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.*
2. *f est strictement croissante dans E si $\forall x, y \in E : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.*
3. *f est décroissante dans E si $\forall x, y \in E : x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.*
4. *f est strictement décroissante dans E si $\forall x, y \in E : x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.*
5. *f est monotone si elle est croissante ou bien décroissante.*
6. *f est strictement monotone si elle est strictement croissante ou bien strictement décroissante.*

1.3 Fonctions périodiques

Définition 1.4 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f est périodique si:*

$$\exists T > 0, \forall x \in \mathbb{R} : f(x+T) = f(x).$$

1.4 Fonctions paires-impaires

Définition 1.5 *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$.

1. *On dit que* f *est paire si* $\forall x \in I, \forall -x \in I : f(-x) = f(x)$.
2. *On dit que* f *est impaire si* $\forall x \in I, \forall -x \in I : f(-x) = -f(x)$.

2 Opérations algèbriques sur les fonctions

Soit $E \subset \mathbb{R}$ et soient $f : E \to \mathbb{R}$ et $g : E \to \mathbb{R}$.

2.1 Somme

On appelle somme de deux fonctions f et g et on note $f + g$, la fonction

$$f + g : E \to \mathbb{R}, x \mapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

2.2 Produit par un scalaire

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. la fonction $\lambda.f$ est définie par

$$\lambda.f : E \to \mathbb{R}, x \mapsto (\lambda.f)(x) = \lambda.f(x).$$

2.3 Produit

On appelle produit de deux fonctions f et g et on note $f.g$, la fonction

$$f.g : E \to \mathbb{R}, x \mapsto (f.g)(x) = f(x).g(x).$$

2.4 Quotient

Si $\forall x \in E : g(x) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est définie par

$$\frac{f}{g} : E \to \mathbb{R}, x \mapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

3 Limite d'une fonction en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et soit $x_0 \in I$. Si $f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0 alors on notera dans ce cas

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

3.1 Propriétés

Proposition 3.1 *Si la limite d'une fonction en un point existe alors elle est unique, et*

$$\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = l\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{\substack{x\to x_0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ <}} f(x) = l\right).$$

3.2 Propriétés

Theorem 3.2 *Soit f et g deux fonctions données alors*
1. *Si* $\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1 \text{ et } \lim_{x\to x_0} g(x) = l_2\right)$ *alors* $\left(\lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = l_1 + l_2\right)$.
2. *Si* $\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1 \text{ et } \lim_{x\to x_0} g(x) = l_2\right)$ *alors* $\left(\lim_{x\to x_0} (f(x).g(x)) = l_1.l_2\right)$.
3. *Si* $\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1 \text{ et } \lim_{x\to x_0} g(x) = l_2 \neq 0\right)$ *alors* $\left(\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{l_1}{l_2}\right)$.
4. *Si* $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ *et g est une fonction bornée alors* $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.
5. *(Théorème d'encadrement ou des gendarmes) Soit $a \in \mathbb{R}$ ou $a = +\infty$ ou $a = -\infty$.*

$$\text{Si } \lim_a f(x) = l \text{ et } \lim_a g(x) = l \text{ et } f \leq h \leq g \text{ alors } \lim_a h(x) = l$$

6. *(Théorème de comparaison)*

$$\text{Si } \lim_{+\infty} f(x) = +\infty \text{ et } g \geq f \text{ alors } \lim_{+\infty} g(x) = +\infty.$$

$$\text{Si } \lim_{+\infty} f(x) = -\infty \text{ et } g \leq f \text{ alors } \lim_{+\infty} g(x) = -\infty.$$

4 Continuité

Définition 4.1 *Soit f une fonction définie en un point x_0.*

1. *On dit que f est continue à droite de x_0 si* $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0)$.
2. *On dit que f est continue à gauche de x_0 si* $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)$.
3. *On dit que f est continue x_0 si*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0).$$

4. *f est continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ si elle est continue en tout point de I.*

4.1 Opérations sur les fonctions continues

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I ; soit un réel $a \in I$. Si les fonctions f et g sont continues en a, alors:

1. $\lambda.f$ est continue en a ($\lambda \in \mathbb{R}$).
2. $f + g$ est continue en a (idem pour "-").
3. $f.g$ est continue en a.
4. $\frac{f}{g}$ est continue en a si $g(a) \neq 0$ et non définie en a si $g(a) = 0$.
5. Si une fonction g est continue au point a et une fonction f est continue au point $g(a)$, alors $f \circ g$ est continue en a.

4.2 Prolongement par continuité

Soit I un intervalle et $x_0 \in I$. Si f une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$, et $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ existe, alors la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

s'appelle le prolongement par continuité de f en x_0. La fonction g est alors continue en x_0.

4.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Theorem 4.2 *Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ avec $f(a) \cdot f(b) < 0$, alors il existe $\alpha \in]a, b[$ tel que $f(\alpha) = 0$. De plus, si f est strictement monotone sur $[a, b]$, alors α est unique.*

4.4 Fonction continue strictement monotone

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit f une fonction définie sut I, continue et strictement monotone alors on a les propriétés suivantes:

1. f est bijective de I vers $f(I)$.
2. L'application réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$, est continue strictement monotone de même nature que f (si f est strictement croissante alors f^{-1} l'est aussi, et si f est strictement décroissante alors f^{-1} l'est aussi).
3. Les graphes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice $y = x$.

5 Dérivation

5.1 Définitions

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$

1. On dit que f est dérivable en un point $x_0 \in I$ si et seulement si la limite suivante existe et est finie
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l, \tag{1}$$
et on note dans ce cas $l = f'(x_0)$ appelé nombre dérivé de f au point x_0.

2. Si dans la limite (1) on pose $x = x_0 + h$, alors si x tend vers x_0, h tend vers 0 et on obtient
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

3. On dira que f est dérivable sur I si et seulement si f est dérivable en tout point de I.

4. Si f est dérivable sur I, on peut alors définir une nouvelle fonction que l'on appellera fonction dérivée notée f', qui à chaque point x_0 de I, associe le nombre dérivé $f'(x_0)$.

5. Interprétation géométrique : La tangente de la courbe représentative de f en un point $(x_0, f(x_0))$ est de pente égale à $f'(x_0)$ et a pour équation
$$y = f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0).$$

6. $$f \text{ dérivable en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

7. $$f \text{ dérivable en } x_0 \Rightarrow f \text{ continue en } x_0.$$

5.2 Règles de dérivation

Si f et g sont deux fonctions dérivables alors on a les règles suivantes

1. $(f + g)' = f' + g'$.
2. $(f.g)' = f'g + fg'$.
3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

4. $(f^{\alpha})' = \alpha f' f^{\alpha-1}$.
5. On note, quand elles existent, $f = f^{(0)}$, $f' = f^{(1)}, f'' = f^{(2)}$ ... $f^{(n)} = \left[f^{(n-1)}\right]'$ et $f^{(n)}$ est appelée dérivée n^{ième} de f.
6. Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur $f(I)$ alors $(g \circ f)$ est dérivable sur I et on a la règle de dérivation
$$(g \circ f)' = f'.(g' \circ f).$$
7. Si f est continue strictement monotone et dérivable sur I alors sa fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et on a la règle de dérivation
$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

5.3 Quelques théorèmes

Theorem 5.1 ***Théorème de Rolle***
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$,
alors
$$\exists c \in]a, b[\,;\ f'(c) = 0.$$

Theorem 5.2 ***Théorème des accroissements finis***
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors
$$\exists c \in]a, b[\,;\ f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Proposition 5.3 *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, et dérivable sur $]a, b[$ alors f est croissante (resp.décroissante) si et seulement si sa dérivée f' est positive (resp. négative).*

Theorem 5.4 ***Règle de L'Hôpital***
Soient f, g deux fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, sauf peut être au point $x_0 \in I$, si $f(x_0) = g(x_0) = 0$ et $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$, et si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, alors
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

5.3.1 Fonctions réciproques élémentaires

1. La fonction
$$f : \quad \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$$
$$x \mapsto f(x) = \sin(x)$$
est continue strictement croissante, elle est donc bijective et admet une application réciproque que l'on notera arcsin, ainsi
$$\arcsin : \quad [-1, 1] \longrightarrow \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]$$
$$x \mapsto f(x) = \arcsin(x)$$

avec

$$\forall x \in [-1,1], \quad \Big(y = \arcsin(x) \Longleftrightarrow x = \sin(y) \text{ et } y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Big).$$

$$\arcsin\left(\sin(x)\right) = x; \quad \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ et } \sin\left(\arcsin(x)\right) = x; \quad \forall x \in [-1,1].$$

2. La fonction

$$f: \quad [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$$
$$x \mapsto f(x) = \cos(x)$$

est continue strictement décroissante, elle est donc bijective et admet une application réciproque que l'on notera arccos, ainsi

$$\arccos: \quad [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$$
$$x \mapsto f(x) = \arccos(x)$$

avec

$$\forall x \in [-1,1], \quad \left(y = \arccos(x) \Longleftrightarrow x = \cos(y) \text{ et } y \in [0,\pi] \right).$$

$$\arccos\left(\cos(x)\right) = x; \quad \forall x \in [0,\pi] \text{ et } \cos\left(\arccos(x)\right) = x; \quad \forall x \in [-1,1].$$

3. La fonction

$$f: \quad \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \tan(x)$$

est continue strictement croissante, elle est donc bijective et admet une application réciproque que l'on notera $\arctan(x)$, ainsi

$$\arctan(x): \quad \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[$$
$$x \mapsto f(x) = \arctan(x)$$

avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Big(y = \arctan(x) \Longleftrightarrow x = \tan(y) \text{ et } y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\Big).$$

$$\arctan\left(\tan(x)\right) = x; \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\text{ et } \tan\left(\arctan(x)\right) = x; \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$