La Logique et les Méthodes de Raisonnement Mathématiques

Université de Tlemcen
Faculté des sciences

September 27, 2023

1 Introduction

1.1 Objectif du cours

Ce cours vise à familiariser les étudiants avec les concepts fondamentaux de la logique mathématique et à développer leurs compétences en matière de raisonnement mathématique.

1.2 Plan du cours

1. Introduction à la logique propositionnelle
2. Connecteurs logiques
3. Tables de vérité
4. Méthodes de raisonnement
   (a) Raisonnement direct
   (b) Raisonnement par contraposition
   (c) Raisonnement par l'absurde
   (d) Raisonnement par contre-exemple
   (e) Raisonnement par récurrence
5. Applications en mathématiques

2 Logique Propositionnelle

2.1 Introduction à la logique propositionnelle

La logique propositionnelle est une branche de la logique mathématique qui traite des propositions, des opérations logiques et de la détermination de la vérité ou de la fausseté des propositions complexes. Cette section présente les concepts de base de la logique propositionnelle et explique son importance en mathématiques.

2.2 Les propositions et leurs opérations

Les propositions sont des déclarations qui peuvent être vraies ou fausses. Cette sous-section examine les propositions simples et complexes, ainsi que les opérations logiques telles que la négation, la conjonction, la disjonction, l'implication et l'équivalence.

Exemple Considérons les propositions P : "Il pleut" et Q : "Je prends un parapluie." La proposition "Si P, alors Q" peut être exprimée comme $P \Rightarrow Q$ en utilisant les connecteurs logiques.

3 Connecteurs Logiques

3.1 Négation, Conjonction, Disjonction, Implication, Équivalence

Dans cette section, nous allons explorer les définitions de base de chaque connecteur logique et comprendre comment ils fonctionnent en logique propositionnelle.

3.1.1 Négation d'une proposition

La **négation** d'une proposition P est une nouvelle proposition notée $\overline{P}$, qui est vraie lorsque P est fausse, et fausse lorsque P est vraie. En d'autres termes, elle inverse la valeur de vérité de la proposition d'origine.

Exemple : Si P représente "Il pleut", alors $\overline{P}$ représente "Il ne pleut pas."

3.1.2 Conjonction ($\wedge$)

La **conjonction** de deux propositions P et Q est une nouvelle proposition notée $P \wedge Q$, qui est vraie uniquement lorsque les deux propositions P et Q sont vraies.

Exemple : Si P représente "Il fait beau" et Q représente "Je vais au parc", alors $P \wedge Q$ signifie "Il fait beau et je vais au parc."

3.1.3 Disjonction ($\vee$)

La **disjonction** de deux propositions P et Q est une nouvelle proposition notée $P \vee Q$, qui est vraie si au moins l'une des deux propositions P et Q est vraie.

Exemple : Si P représente "Il fait beau" et Q représente "Il pleut", alors $P \vee Q$ signifie "Il fait beau ou il pleut."

3.1.4 Implication ($\Rightarrow$)

L'**implication** de deux propositions P et Q est une nouvelle proposition notée $P \Rightarrow Q$, qui est vraie sauf dans le cas où P est vraie et Q est fausse. Elle exprime généralement une relation de cause à effet.

Exemple : Si P représente ”Si le sol est mouillé” et Q représente ”Alors il a plu”, alors $P \Rightarrow Q$ signifie ”Si le sol est mouillé, alors il a plu.”

3.1.5 Équivalence ($\Leftrightarrow$)

L'**équivalence** de deux propositions P et Q est une nouvelle proposition notée $P \Leftrightarrow Q$, qui est vraie lorsque les deux propositions ont la même valeur de vérité (vraies toutes les deux ou fausses toutes les deux). Elle exprime une relation de bi-implication.

Exemple : Si P représente ”Il pleut” et Q représente ”Le sol est mouillé”, alors $P \Leftrightarrow Q$ signifie ”Il pleut si et seulement si le sol est mouillé.”

4 Tables de Vérité

Construction de tables de vérité

Les tables de vérité sont des outils essentiels pour déterminer la valeur de vérité des propositions complexes. Dans cette section, nous allons construire des tables de vérité pour deux propositions données.

Table de vérité pour la proposition ”$(P \wedge Q) \vee \overline{P}$” Pour construire la table de vérité pour la proposition ”$(P \wedge Q) \vee \neg P$”, suivez ces étapes :

1. Identifiez les propositions de base : P et Q.
2. Énumérez toutes les combinaisons possibles de valeurs de vérité pour P et Q.
3. Évaluez la valeur de vérité de chaque composant de la proposition en utilisant les connecteurs logiques appropriés.
4. Enregistrez la valeur de vérité de la proposition globale.

Voici la table de vérité pour ”$(P \wedge Q) \vee \overline{P}$” :

P	Q	$\overline{P}$	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \vee \overline{P}$
Vrai	Vrai	Faux	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux	Faux	Faux
Faux	Vrai	Vrai	Faux	Vrai
Faux	Faux	Vrai	Faux	Vrai

5 Méthodes de Raisonnement

5.1 Raisonnement Direct

Le raisonnement direct est une méthode de preuve où l'on part d'hypothèses vraies pour déduire une conclusion. Cette section explique comment utiliser le raisonnement direct pour prouver des énoncés mathématiques.

5.1.1 Exemple (Raisonnement Direct)

Montrez que si n est un entier pair, alors n^2 est un entier pair.

5.2 Raisonnement par Contraposition

Le raisonnement par contraposition consiste à montrer que la négation de l'énoncé implique une négation.

5.2.1 Exercice (Raisonnement par Contraposition)

Utilisez la contraposition pour montrer que si n est un entier impair, alors n^2 est un entier impair.

5.3 Raisonnement par l'Absurde

Le raisonnement par l'absurde est une technique de démonstration où l'on suppose que la négation de l'énoncé conduit à une contradiction.

5.4 Raisonnement par Contre-Exemple

Montrez que: Si on a $x^3 + x^2 + x - 3 \neq 0$ alors $x \neq 0$.

5.5 Raisonnement par Récurrence

Le raisonnement par récurrence est une méthode de preuve pour établir des énoncés pour tous les entiers naturels. Cette section explique les trois étapes de la récurrence : Initialisation, Hypothèse de Récurrence, Étape de Récurrence.

6 Applications en Mathématiques

6.1 Exemples concrets d'application

Cette section propose des exemples mathématiques concrets.

6.1.1 Exemple

Montrez que la somme de deux entiers impairs est un entier pair.

6.1.2 Exercice

Utilisez la récurrence pour prouver que $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout entier positif n.