Ensembles et Applications

Université de Tlemcen
Faculté des sciences

October 17, 2023

1 Ensembles

Définition 1.1 *Un ensemble est une collection d'objets ou d'éléments.*
Il existe un cas particulier où un ensemble ne contient aucun élément, c'est l'ensemble vide. il est noté par $\emptyset$.

Exemple 1.2 $\{0,1\}$, $\{\heartsuit, \spadesuit\}$, *ensemble des lettres d'alphabets...*

Si x appartient à un ensemble E, alors on note $x \in E$. On note $x \notin E$ pour le cas contraire.

1.1 Inclusion

Un ensemble E est inclus dans un autre ensemble F et on note $E \subset F$ si chaque élément de E et aussi élément de F. Dans ce cas, E est un sous-ensemble de F. Si en plus, l'inclusion au sens inverse est vérifiée, c'est à dire que $F \subset E$ alors on parlera d'égalité au sens des ensembles. Donc $E = F \Leftrightarrow (E \subset F)$ et $(F \subset E)$.

1.2 Ensemble des parties d'un ensemble

Définition 1.3 *Soit* E *un ensemble donné, on note* $\mathcal{P}(E)$, *l'ensemble des parties de* E

$$\mathcal{P}(E) = \{A,\ A \subset E\}$$

Définition 1.4 *On appelle cardinal d'un ensemble, le nombre de ses éléments, et on le note card. Par Example, si* $E = \{a, b, c\}$ *alors* $card(E) = 3$.

1.3 Complémentaire d'un ensemble

Soit E un ensemble donné, et soit $A \subset E$. Le complémentaire de A dans E est l'ensemble noté $C_E A = \{x \in E :\ x \notin A\}$.

1.4 Union

Soient A, B deux sous ensembles d'un ensemble E. L'union de A et B est l'ensemble $A \cup B$ défini par

$$A \cup B = \{x \in E : \ x \in A \vee x \in B\}.$$

1.5 Intersection

Soient A, B deux sous ensembles d'un ensemble E. L'intersection de A et B est l'ensemble $A \cap B$ défini par

$$A \cap B = \{x \in E : \ x \in A \wedge x \in B\}.$$

1.6 Différence

Soient A, B deux sous ensembles d'un ensemble E. La différence de A et B est l'ensemble des éléments de A n'appartenant pas à B:

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \{x \in E : \ x \in A \wedge x \notin B\} \\ &= A \cap C_E B. \end{aligned}$$

1.7 Différence symétrique

Soient A, B deux sous ensembles d'un ensemble E. La différence symétrique de A et B est l'ensemble noté $A \triangle B$ défini par

$$\begin{aligned} A \triangle B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B). \end{aligned}$$

Proposition 1.5 *Soient A, B, C trois sous-ensembles d'un ensemble E. Nous avons les égalités au sens des ensembles suivantes :*

$C_E(C_E A) = A.$	$A \subset B \Leftrightarrow C_E B \subset C_E A.$
$A \cap A = A.$	$A \cup A = A.$
$A \cap B = B \cap A.$	$A \cup B = B \cup A.$
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
$C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B.$	$C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B.$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$

2 Les applications

Définition 2.1 *Une application f est une relation entre deux ensembles A et B, pour laquelle chaque élément du premier (appelé ensemble de départ) est relié à un unique élément du second (l'ensemble d'arrivée).*
*Les éléments de l'ensemble de départ A sont appelés les **antécédents**.*
*Les éléments de l'ensemble d'arrivé B sont appelés les **images**. Donc y est l'image de x par l'application f, on note $y = f(x)$. Inversement, on dira que x est l'antécédent de y.*

2.1 Image directe, image réciproque

Soient A, B deux ensembles.

Définition 2.2 *Soit $E \subset A$ et $f : A \longrightarrow B$, l'image directe de E par f est l'ensemble*

$$f(E) = \{f(x) : x \in E\}.$$

Définition 2.3 *Soit $F \subset B$ et $f : A \longrightarrow B$, l'image réciproque de F par f est l'ensemble*

$$f^{-1}(F) = \{x \in A : f(x) \in F\}.$$

2.2 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Soit $f : A \longrightarrow B$ une application donnée.

Définition 2.4 *Une application f est dite injective ou est une injection si tout élément de son ensemble d'arrivée a au plus un antécédent par f.*

Dans la pratique, pour montrer que f est injective on utilise la définition suivante:

Définition 2.5 *Une application $f : A \longrightarrow B$, est injective si pour tout $y \in B$, il existe au plus un $x \in A$ tel que $y = f(x)$, ce qui s'écrit*

$$\forall x_1, x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Remarque 2.6 *L'implication précédente équivaut à sa contraposée :*

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Définition 2.7 *Une surjection ou application surjective est une application pour laquelle tout élément de l'ensemble d'arrivée a au moins un antécédent.*

Définition 2.8 *f est surjective si pour tout élément y de B, il existe au moins un élément x de A tel que $y = f(x)$ i.e*

$$\forall y \in B, \exists x \in A : y = f(x).$$

Définition 2.9 *Une application est bijective si elle est injective et surjective. Autrement dit, elle est bijective si et seulement si tout élément de son ensemble d'arrivée a un et un seul antécédent, i.e*

$$\forall y \in B, \exists! x \in A : y = f(x).$$

Définition 2.10 *Soient $f : A \longrightarrow B$ et $g : B \longrightarrow C$ alors $g \circ f : A \longrightarrow C$ est l'application définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

Proposition 2.11 *Soient A, B deux ensembles et $f : A \longrightarrow B$ une application.*

- *f est bijective si et seulement si il existe une application $g : B \longrightarrow A$ telle que $f \circ g = id_B$ et $g \circ f = id_A$.*

- *Si f est bijective alors g est unique et bijective. g est appelée* ***bijection réciproque*** *de f et notée f^{-1}. De plus, $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.*

Proposition 2.12 *Soient $f : A \longrightarrow B$ et $g : B \longrightarrow C$ deux applications bijectives. L'application $g \circ f$ est bijective et sa bijection réciproque est*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Remarque 2.13 *Une fonction est un type spécifique d'application où chaque élément du domaine est associé à un élément unique du codomaine. Toutes les fonctions sont des applications, mais toutes les applications ne sont pas nécessairement des fonctions. Les fonctions sont un cas particulier d'application avec une relation univoque.*