Examen Final de Math1

Exercice1

Montrer par récurrence:

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots\dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Exercice2

On considère l'application:

$$f: \quad \begin{array}{l} [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}$$

1. Calculer $f^{-1}(\{2\})$ et $f^{-1}(\{\frac{1}{2}\})$.
2. Étudier l'injectivité et la surjectivité de f.
3. f est elle bijective?

Exercice3

Étudier la continuité et la dérivabilité sur le domaine de définition de la fonction suivante, puis calculer $f'(0)$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Exercice4

En effectuant un développement limité en 0, à un ordre à déterminer, calculer l'équation de la tangente en 0 du graphe de la fonction suivante et indiquer la position relative du graphe et de sa tangente:

$$f(x) = \sqrt{1+2x} - \sqrt{1+x^2}.$$

Exercice5

Soit l'ensemble E défini par

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + 3z = 0\}$$

Est ce que l'ensemble E est un sous espace vectoriel?

Bon Courage!

Corrigé de l'E.F de MATH1

Exercice 1: (1,5pt)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$P(n) : \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

- $P(1)$: $1^2 = \frac{1}{6} 1 (1+1)(2+1)$ est vraie. 0.5
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $P(n)$ est vraie, alors :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \quad 0.5$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)\left[n(2n+1) + 6(n+1)\right]$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2+7n+6)$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) \quad 0.5$$

Ce qui prouve $P(n+1)$ est vraie

Conclusion : $P(n)$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2: (6.5pts)

On considère l'application : $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

1). Calculons $f^{-1}(\{2\}) = ?$

$$x \in f^{-1}(\{2\}) \iff x \in [-1,1] \text{ et } f(x) = 2 \quad 0.5$$

$$\iff x \in [-1,1] \text{ et } \frac{1}{1+x^2} = 2 \quad 0.5$$

$$\iff x \in [-1,1] \text{ et } x^2 = -\frac{1}{2} \quad \text{impossible } 0.5$$

D'où $\nexists\, x \in f^{-1}(\{2\}) \Longrightarrow \boxed{f^{-1}(\{2\}) = \emptyset}$ 0.5

• Calculons $f^{-1}(\{\frac{1}{2}\}) = ?$

$x \in f^{-1}(\{\frac{1}{2}\}) \Longleftrightarrow x \in [-1,1]$ et $f(x) = \frac{1}{2}$ 0.5

$\Longleftrightarrow x \in [-1,1]$ et $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}$ 0.5

$\Longleftrightarrow x \in [-1,1]$ et $x^2 - 1 = 0$

$\Longleftrightarrow x \in [-1,1]$ et $x = \pm 1$

$\Longleftrightarrow x = +1$ ou $x = -1$ 0.5

D'où $\boxed{f^{-1}(\{\frac{1}{2}\}) = \{-1, 1\}}$ 0.5

2) • Injectivité de f ?

De la première question on a : $f(1) = f(-1) = \frac{1}{2}$. Donc f n'est pas injective. 1

• Surjectivité de f ?

De la première question : $\nexists x \in [-1,1] \,/\, f(x) = 2$. Donc f n'est pas surjective. 1

3) f n'est ni injective, ni surjective donc elle n'est pas bijective. 0.5

Exercice 3 : 5 pts

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

→ f est définie sur $\mathbb{R}$. 0.5

→ f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car c'est le rapport de 2 fonctions dérivables en particulier sur $\mathbb{R}^*$. 1

Il s'en suit que f est continue sur $\mathbb{R}^*$. 0.5

→ Etudions la continuité en $x = 0$?

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 = f(0)$$

donc f est continue en 0 $\underline{1pt}$

→ Etudions la dérivabilité en $x = 0$?

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \quad \underline{0.5}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1 - x)'}{(x^2)'} \underset{\underline{0.5}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)'}{(2x)'}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2} \quad \underline{0.5}$$

f est dérivable en 0 et $\boxed{f'(0) = \frac{1}{2}}$ $\underline{0.5}$

on a alors ;

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^x - e^x + 1}{x^2} & \text{pour } x \neq 0 \\[2ex] \dfrac{1}{2} & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

<u>Exercice 4</u> : 5,5pts

$$f(x) = \sqrt{1 + 2x} - \sqrt{1 + x^2}$$

On effectue un DL d'ordre 2 en 0 :

$$(1 + u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} u^2 + o(u^2)$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$ on a :

$$\sqrt{1 + u} = 1 + \frac{1}{2} u - \frac{1}{8} u^2 + o(u^2)$$

Maintenant on remplace u par $2x$:

$$\sqrt{1 + 2x} = 1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \underline{1pt}$$

on remplace u par x^2 :

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$ 1pt

on obtient ainsi le D.L de f en 0 :

$$\boxed{f(x) = x - x^2 + o(x^2)}$$ 1pt

L'équation de la tangente en 0 de f est : $\boxed{y = x}$ 1pt

Pour déterminer la position relative du graph de f et de la droite $y = x$ on regarde la différence :

$$f(x) - x = -x^2 + o(x^2) \underline{\leq 0}$$ 1pt

On conclut que <u>f est en dessous de sa tangente en 0.</u> 0,5

<u>Exercice 5 :</u> 1.5pt

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ;\ x + y + 3z = 0\}$$

- $E \neq \emptyset$ (car $(0, 0, 0) \in E$) 0.5
- Soient $X = (x, y, z)$ et $X' = (x', y', z')$ éléments de E. Alors, $X + X' = (x + x', y + y', z + z')$ est aussi élément de E. En effet,

$$(x+x') + (y+y') + 3(z+z') = (x + y + 3z) + (x' + y' + 3z') = 0$$ 0.5

De même, pour $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$\lambda X = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ est un élément de E, puisque

$$\lambda x + \lambda y + 3\lambda z = \lambda(x + y + 3z) = 0$$ 0.5

<u>E est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.</u>