Abou Bekr Belkaid - Tlemcen | Année universitaire: 2023 - 2024
Faculté des sciences | Module: Algèbre 2
Département de mathématiques | L1 Math + MI

T.D N°2 : Applications linéaires

Exercice 1

On considère l'application f définie par :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \mapsto \left(x - y,\ -3x + 3y\right)$$

(1) Montrer que f est linéaire.
(2) Déterminer l'image du vecteur $v = (1,1)$ par f.
(3) Existe-il un vecteur $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $f(u) = \left(1,\ 0\right)$?
(4) Donner une base de $\ker(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
(5) Montrer par deux méthodes que f n'est ni injective ni surjective.

Exercice 2

On considère l'application T définie par :

$$T : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$$
$$P \mapsto (X^2 + 1)P'$$

(1) Montrer que T est linéaire.
(2) Déterminer $\ker(T)$, le noyau de T et en déduire $rg(T)$, le rang de T.
(3) T est-elle injective? Surjective?.

Exercice 3 (**Devoir-maison**)

On considère l'application f définie par :

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \mapsto (x - y, y + z)$$

(1) Montrer que f est une application linéaire.
(2) Montrer que $\ker(f)$ est un $s.e.v$ de $\mathbb{R}^3$.
(3) Déterminer $\dim(\ker(f))$. f est-elle injective?
(4) En déduire $rg(f)$. f est-elle surjective?

Exercice 4 (**Supplémentaire**)

On considère l'application f définie par :

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \mapsto \left(-2x + y + z,\ x - 2y + z, x + y - 2z\right)$$

(1) Montrer que f est linéaire.
(2) Donner une base de $\ker(f)$ et en déduire le rang de f.
(3) Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 5 (**Supplémentaire**)

On considère l'application f définie par : $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x,y) \mapsto \left(x + y,\ x, y\right)$$

(1) Montrer que f est linéaire.
(2) Déterminer $\ker(f)$.
(3) Determiner $rg(f)$.
(4) f est-elle injective? Surjective?.

INDICATIONS EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Exercice 4

(1)

$$u_1 = (x_1, y_1, z_1), u_2 = (x_2, y_2, z_2)$$
$$u_1 + u_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (X, Y, Z)$$
$$f(u_1 + u_2) = f(X, Y, Z) = (-2X + Y + Z, X - 2y + Z, X + Y - 2Z)$$

$= ([-2x_1 + y_1 + z_1] + [-2x_2 + y_2 + z_2], [x_1 - 2y_1 + z_1] + [x_2 - 2y_2 + z_2], [x_1 + y_1 - 2z_1] + [x_2 + y_2 - 2z_2])$
$= f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$

$$\begin{aligned} f(\alpha u) &= \left(-2\alpha x + \alpha y + \alpha z,\ \alpha x - 2\alpha y + \alpha z, \alpha x + \alpha y - 2\alpha z\right) \\ &= \alpha\left(-2x + y + z,\ x - 2y + z, x + y - 2z\right) \end{aligned}$$

(2) $u = (x,y,z) \in \ker(f) \Rightarrow f(x,y,z) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} -2x + y + z \\ x - 2y + z \\ x + y - 2z \end{cases} \Rightarrow x = y, z = y$

$\ker(f) = Vect\{(1,1,1)\}$
$rg(f) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim(\ker(f)) = 2$
(3) $\mathrm{Im}(f) = Vect\{(-2,1,1),(1,-2,1),(1,1,-2)\} = Vect\{(1,-2,1),(1,1,-2)\}$
car $(-2,1,1) = -(1,-2,1) - (1,1,-2)$

Exercice 5

(2) $u = (x,y) \in \ker(f) \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$

$\ker(f) = \{(0,0)\}$
(3) $rg(f) = \dim \mathbb{R}^2 - \dim(\ker(f)) = 2$
ou $f(x,y) = \left(x + y,\ x, y\right) = x(1,1,0) + y(1,0,1)$
$\mathrm{Im}(f) = Vect\{(1,1,0),(1,0,1)\}$
$rg(f) = 2$
(3) f inj
$\mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3$ non surj