Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Année universitaire: 2023 - 2024
Module: Algèbre 2
L1 Math

T.D N°1 : Espaces vectoriels

Exercice 1

(1) Soit $E = \mathbb{R}^{+*}$ muni d'une loi interne $\oplus$ définie par : $\forall a,b \in E : a \oplus b = ab$,
et d'une loi externe $\otimes$ tel que : $\forall a \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda \otimes a = a^{\lambda}$.
Montrer que $(E,\oplus,\otimes)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
(2) Soit U l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Montrer que $(U,+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 2

Parmi les ensembles F dire lesquels sont des $s.e.v$ de E dans chaque cas :
(1) $E = \mathbb{R}^3$, $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x + 2y + 3z = 0\right\}$. (2) $E = \mathbb{R}^2$, $F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 2x + 3y = 0\right\}$
(3) $E = \mathbb{R}^2$, $F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 4\right\}$, (4) $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \left\{P \in \mathbb{R}[X];\ \deg(P) = 4\right\}$
(5) $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \mathbb{R}_4[X] = \left\{P \in \mathbb{R}[X];\ \deg(P) \leq 4\right\}$
(6) $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ensemble des suites réelles, $F = \left\{(u_n) \in E :\ f \text{ est croissante } \right\}$
(7) $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F = \left\{f \in E;\ f(1) = 0\right\}$, (8) $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F = \left\{f \in E;\ f(0) = 1\right\}$.

Exercice 3

Soient $u = (1,2,3)$ et $v = (2,3,1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
(1) Ecrire les vecteurs $w_1 = (1,3,8)$ et $w_2(2,4,5)$ comme combinaison linéaires de u et v.
(2) Déterminer le réel k pour que le vecteur $w = (1,k,-2)$ soit combinaison linéaire de u et v.
(3) Déterminer des conditions sur les réels a, b et c pour que le vecteur $W = (a,b,c)$ puisse s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs u et v.

Exercice 4

Soient $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x = y = z\right\}$ et $W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x = 0\right\}$
(1) Montrer que U et W sont des $s.e.v$ de $\mathbb{R}^3$
(2) Montrer que : $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$

Exercice 5

(1) Montrer que : $F = \left\{(X-1)^3,(X-1)^2,(X-1),1\right\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
(2) Trouver les composantes du polynôme $P(X) = 3X^3 - 4X^2 + 2X - 5$ dans cette base.

Exercice 6

Soient $F = Vect\{u_1,u_2\}$ le $s.e.v$ de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\{u_1,u_2\}$ où
$u_1 = (1,0,-1), u_2 = (0,1,-1)$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = x + z = 0\}$.
(1) Montrer que $\{u_1,u_2\}$ est libre.
(2) Montrer que G est un $s.e.v$ de $\mathbb{R}^3$.
(3) Montrer que si $(x,y,z) \in F$ alors $x + y + z = 0$.
(4) Déterminer une base pour F et une base pour G et en déduire $\dim(F)$ et $\dim(G)$.
(5) Déterminer $F \cap G$ et en déduire que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Exercice 7

(1) Montrer que : $S = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
(2) Trouver les composantes de $v = (1,1,2)$ et $w = (2,3,4)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et dans la base S.
(3) Déterminer les composantes des vecteurs de la base canonique dans la base S.

Exercice 8

Soient

$$U_1 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,:\, a = c\right\}, U_2 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,:\, a+b+c = 0\right\} \text{ et } U_3 = \left\{(0,0,c) \,:\, c \in \mathbb{R}\right\}$$

(1) Montrer que : $U_i,\ i = 1,3$ sont des $s.e.v$.de $\mathbb{R}^3$.
(2) Montrer que : $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2, \mathbb{R}^3 = U_2 + U_3, \mathbb{R}^3 = U_1 + U_3$.
(3) Déterminer $\dim U_1,\ \dim U_2$ et $\dim U_3$.
(4) Dans quel cas la somme est directe.

Exercice 9

Soient $A = \{(x+y, y-3x, x) \,:\, x,y \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, y = -2x = -2z\}$.
(1) Vérifier que A et B sont deux $s.e.v$ de $\mathbb{R}^3$.
(2) Déterminer $\dim A$ et $\dim B$.
(3) Montrer que $A \oplus B = \mathbb{R}^3$.

Exercice 10

Soit $\mathbb{R}_1[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 1 et $B = \{1, x\}$ sa base canonique.
(1) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R} \,:\, a + bx = \dfrac{a-b}{2}(1-x) + \dfrac{a+b}{2}(1+x)$
(2) Déterminer les réels α et β tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha(1-x) + \beta(1+x) = 0$.
(3) En déduire que : $C = \{1-x, 1+x\}$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$.
(4) Déterminer les composantes du vecteur $P(x) = 2x + 3$, ainsi que les vecteurs de la base canonique B dans la base C.

Exercice 11

Soit $E = \mathbb{R}_1[X],\ E_1 = \left\{P \in E;\ P(-X) = P(X)\right\}$ et $E_2 = \left\{P \in E;\ P(-X) = -P(X)\right\}$.
(1) Montrer que E_1 et E_2 sont des $s.e.v$ de E.
(2) Montrer par deux méthodes que $E = E_1 \oplus E_2$.

Exercice 12

On note $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On note $\wp(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\Im(\mathbb{R},\mathbb{R})$ les sous espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions paires et impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définis par :
$\wp(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,:\, \forall x \in \mathbb{R} \,:\, f(-x) = f(x)\}$,
$\Im(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,:\, \forall x \in \mathbb{R} \,:\, f(-x) = -f(x)\}$
Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on définit deux fonctions p et i de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par :
$\forall x \in \mathbb{R} \,:\, p(x) = \dfrac{1}{2}[f(x) + f(-x)],\ i(x) = \dfrac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$.
(1) Montrer que p est paire et i est impaire. En déduire que $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \wp(\mathbb{R},\mathbb{R}) + \Im(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
(2) Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \wp(\mathbb{R},\mathbb{R}) \oplus \Im(\mathbb{R},\mathbb{R})$.