Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Année universitaire: 2023 - 2024
Module: Algèbre 2
L1 Math+MI

T.D N°02 : Polynômes et fractions rationnelles

Exercice 1

(1) Calculer, développer et ordonner suivant les puissances décroissantes, le polynôme suivant :

$$P(x) = (x^3 - x^2 + 2x - 1)(2x^2 - 3x + 3) + (1 - 2x + 2x^3)(2 + x - x^2).$$

(2) Faire la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ de $P(x)$ par $2x^2 - 3x + 3$.
(3) Faire la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 3 dans $\mathbb{R}[X]$ de $P(x)$ par $1 - 2x + 2x^3$.

Exercice 2

(I) Soit $P = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, un polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
(1) Démontrer que si P admet une racine dans $\mathbb{Z}$, alors celle-ci divise a_0.
(2) Les polynômes $x^3 - 2x^2 - 109x - 11$ et $x^{10} + x^5 + 1$ ont-ils des racines dans $\mathbb{Z}$?
(II) Soit $P(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 1$
(1) Montrer que P admet une racine entière et déterminer son ordre de multiplicité.
(2) Factoriser $P(x)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3

(1) Calculer, développer et ordonner suivant les puissances croissantes, le polynôme suivant :

$$P(x) = (1 + x)(x^3 + 1) + (2 + x)(x - 1).$$

(2) Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ en produit de polynômes irréductibles, le polynôme suivant :

$$Q(x) = x^3 + x^2 + x + 1 .$$

(3) Faire la division euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$.
(4) Effectuer la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 2 de $P(x)$ par $Q(x)$.
(5) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Exercice 4

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

$$F_1(x) = \frac{1}{x^3 + 3x^2 + 2x}, \quad F_2(x) = \frac{3x^4}{x^3 - 1},$$
$$F_3(x) = \frac{x^3 + 1}{(x - 1)^3}$$

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

Exercice 1

(1) Déterminer le polynôme P de degrè 2 vérifiant :

$$P(0) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R} : P(x) - P(x-1) = x........(*)$$

(2) En utilisant la relation $(*)$, calculer la somme

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

Exercice 2

Soit $A(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 8x - 4$.

(1) Montrer que $x_0 = 2$ est une racine double du polynôme A, et déduire les autres racines.

(2) Factoriser $A(x)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes suivants :

$$P_1(x) = x^4 - 1,\ P_2(x) = x^6 + 1,\ Q_1(x) = x^6 + 2x^4 - 2x^2 + 1$$

$$Q_2(x) = x^{10} + x^5 + 1,\ R_1(x) = x^{12} - 1,\ R_2(x) = x^9 + x^6 + x^3 + 1$$

Exercice 4

Soit $A(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$

(1) Montrer que A admet une rarice entière α simple.

(2) Factoriser $A(x)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 5

Quel est le reste de la division euclidienne du polynôme

$$P(x) = (x+1)^n - x^n - 1 \text{ par}$$

$$(i)\ Q_1(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$(ii)\ Q_2(x) = x^2 - 2x + 1$$

Exercice 6

Considérons le polynôme suivant :

$$Q(x) = x^3 - x^2 - x + 1.$$

(1) Vérifier que $x_0 = 1$ est une racine double du polynôme Q.

(2) Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ en produit de polynômes irréductibles, le polynôme Q.

(3) Déterminer le polynôme P dont le quotient et le reste de sa division euclidienne par Q, sont :

$$A(x) = x \text{ et } R(x) = 4 \text{ respectivement.}$$

(4) Effectuer la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 2 de P par Q.

(5) Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$, la fraction rationnelle suivante :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Exercice 7

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

$$F_1(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2},\ F_2(x) = \frac{1}{x^3 - 3x^2 + 2}$$

$$F_3(x) = \frac{x^5 - 4x^4 + 5x^3 + x^2 - 4x + 5}{x^3 - 6x^2 - 11x - 6},\ F_4(x) = \frac{x^3}{x^4 - 1}$$