Abou Bekr Belkaid University - Tlemcen
Faculty of Sciences
Department of Mathematics

Academic year: 2023 - 2024
Module: Algebra 2
L1 Math+MI

Tutorial sheet N°01 : Algebraic structures

Exercise 1

We equip the set of real numbers $\mathbb{R}$ with the two internal composition laws (binary operations) $*$ and T defined by :

$$\forall x,y \in \mathbb{R},\ x * y = x + y - 1,\ \ xTy = x + y - xy$$

(1) Are the binary operations (laws) $*$ and T commutative ?
(2) Are the binary operations (laws) $*$ and T associative ?
(3) What are the neutral elements for the binary operations (laws) $*$ and T ?
(4) What are the symmetrizable elements for each of these laws?
(5) Is $(\mathbb{R},*)$an abelian group ?
(6) Solve the following equations in $\mathbb{R}$:

$$x * 2 = 0 \text{ and } x * x * 3 = 2.$$

(7) Show that the binary operation (law) T is distributive with respect to the binary operation (law) $*$.
(8) Show that $(\mathbb{R},*,T)$ is a commutative field.
(9) Solve the following equations in $\mathbb{R}\backslash\{1\}$:

$$xT2 = 1 \text{ and } xTxT(-1) = -1.$$

Exercise 2

(1) Let $(A,+,\cdot)$ be a non-commutative unitary ring of neutral elements 0 and 1 for the addition $(+)$ and multiplication $(\cdot)$ respectively.
Let us set $B = \left\{x \in A\backslash\{0\} \ :\ x \text{ admits an inverse } x^{-1} \text{ in } A\right\}$,the set of invertible elements of ring A.
- Determine a condition on the set B so that $(A,+,\cdot)$ is a field.
(2) We assume that $(A,+,\cdot)$ is a non-commutative field.
For each $a \in A$, we define the map

$$f_a : A \to A \text{ by} : \forall x \in A,\ f_a(x) = a \cdot x \cdot a^{-1}$$

(i) Calculate $f_a(1)$.
(ii) Show that f_a is a field automorphism.

Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Année universitaire: 2023 - 2024
Module: Algèbre 2
L1 Math+MI

T.D N°01 : Structures Algébriques

Exercice 1

On muni l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ des deux L.C.I $*$ et T définies par :

$$\forall x,y \in \mathbb{R},\ x * y = x + y - 1,\quad xTy = x + y - xy$$

(1) Les lois $*$ et T sont-elles commutatives ?
(2) Les lois $*$ et T sont-elles associatives ?
(3) Quels sont les éléments neutres pour les lois $*$ et T ?
(4) Quels sont les éléments symétrisables pour chacune de ces lois ?
(5) $(\mathbb{R}, *)$ est-il un groupe abélien?
(6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$x * 2 = 0 \text{ et } x * x * 3 = 2.$$

(7) Montrer que la loi T est distributive par rapport à la loi $*$.
(8) Montrer que $(\mathbb{R}, *, T)$ est un corps commutatif.
(9) Résoudre dans $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ les équations suivantes :

$$xT2 = 1 \text{ et } xTxT(-1) = -1.$$

Exercice 2

(1) Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau unitaire non commutatif d'éléments neutres 0 et 1 pour l'addition $(+)$ et la multiplication $(\cdot)$ respectivement.
On pose $B = \left\{x \in A\backslash\{0\} : x \text{ admet un inverse } x^{-1} \text{ dans } A\right\}$, l'ensembles des éléments inversibles de l'anneau A.
- Déterminer une condition sur l'ensemble B pour que $(A, +, \cdot)$ soit un corps.
(2) On suppose que $(A, +, \cdot)$ est un corps non commutatif.
Pour chaque $a \in A$, on définit l'application

$$f_a : A \to A \text{ par : } \forall x \in A,\ f_a(x) = a \cdot x \cdot a^{-1}$$

(i) Calculer $f_a(1)$.
(ii) Montrer que f_a est un automorphisme de corps.