Rattrapage -Analyse 2-

Exercice 1 (08.5 points)

1. **(04.5 points).** En utilisant la **formule de Taylor (Mc–Laurin)-Young**, déterminer le $DL_2(0)$ des fonctions suivantes :
$$x \mapsto f(x) = e^x \quad \text{et} \quad x \mapsto g(x) = \ln(1+x).$$
2. **(2 points). En déduire** le $DL_2(0)$ de la fonction $x \mapsto h(x) = e^x \ln(1+x)$.
3. **(2 points).** En déduire alors **la limite**:
$$B = \lim_{x\to 0} \frac{e^x \ln(1+x) - x}{x^2}.$$

Exercice 2 (11.5 points)

1. **(03. points). Par parties**, calculer l'intégrale suivante :
$$I = \int x\sqrt{x+1}dx.$$
2. **(02 points).** Par un **changement de variables**, calculer l'intégrale suivante :
$$J = \int \frac{x}{x^4+4}dx.$$
3. **(03 points).** En utilisant **la forme canonique**, calculer l'intégrale suivante :
$$K = \int \frac{dx}{x^2+10x+30}.$$
4. **(03.5 points).** Résoudre l'EDO d'ordre 2, **à coefficients constants** suivante :
$$(E)...y'' + \pi^2 y = \sin(\pi x).$$

Bon courage.

Remarque: L'usage des téléphones portables est strictement interdit.

Abou Bekr Belkaid University of Tlemcen.
Faculty of Sciences.

1^{st} grade LMD (2023/2024).
S2- M and MI, duration 1h:30$'$.

Catch-up Exam -Calculus 2-

Exercise 1 (08.5 points)

1. **(04.5 points).** Using the **Taylor (Mc–Laurin)-Young formula**, determine the $LE_2(0)$ of the following functions :
$$x \mapsto f(x) = e^x \quad \text{and} \quad x \mapsto g(x) = \ln(1+x).$$
2. **(2 points). Deduce** the $LE_2(0)$ of the function $x \mapsto h(x) = e^x \ln(1+x)$.
3. **(2 points).** Deduce then the **limit**:
$$B = \lim_{x \to 0} \frac{e^x \ln(1+x) - x}{x^2}.$$

Exercise 2 (11.5 points)

1. **(03. points). By parts**, calculate the following integral :
$$I = \int x\sqrt{x+1}dx.$$
2. **(02 points).** By a **variable change**, calculate the following integral :
$$J = \int \frac{x}{x^4+4}dx.$$
3. **(03 points).** Using the **canonical form**, calculate the following integral :
$$K = \int \frac{dx}{x^2+10x+30}.$$
4. **(03.5 points).** Solve the following **ODE** of order **2**, with **constant coefficients**:
$$(E)...y'' + \pi^2 y = \sin(\pi x).$$

Good luck.

Note: The use of mobile phones is strictly prohibited.

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen. 1ère année LMD (2022/2023).
Faculté des Sciences S2-MI, durée 1h:30$'$, le 13/06/2023.

Correction du Rattrapage -Analyse 2-

Exercice 1 (08.5 points)

1. En utilisant la **formule de Taylor-Young**, déterminer le $DL_2(0)$ des fonctions suivantes :

$$x \mapsto f(x) = e^x \qquad \text{et} \quad x \mapsto g(x) = \ln(1+x).$$

Formule de Taylor-Young au voisinage de 0 à l'ordre 2:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + o(x^2).....(\mathbf{1pt}). \\ Où \quad \lim_{x\to 0}\frac{o(x^2)}{x^2} &= 0. \end{aligned}$$

Puisque $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $g \in C^\infty(]-1,+\infty[)$ alors leurs DLs (à n'importe quel ordre) sont obtenus par la formule de Taylor-Young.
On a $f(x) = f'(x) = f''(x) = e^x$ et $f(0) = f'(0) = f''(0) = e^0 = 1.(\mathbf{0.25pt})$.
Donc :

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).(\mathbf{1pt}).$$

Ensuite, $g(0) = 0$, $(\mathbf{0.25pt})$.et

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{1+x} \quad et \quad g'(0) = 1.(\mathbf{0.5pt}). \\ g''(x) &= \frac{-1}{(1+x)^2} \quad et \quad g''(0) = -1.(\mathbf{0.5pt}). \end{aligned}$$

Ce qui fait que :

$$g(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).(\mathbf{1pt}).$$

2. **En déduire** le $DL_2(0)$ de la fonction $x \mapsto h(x) = e^x \ln(1+x)$.

$$\begin{aligned} h(x) &= \left[1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right]\left[x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right] (\mathbf{1pt}) \\ h(x) &= x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).(\mathbf{1pt}). \end{aligned}$$

3. En déduire **la limite**:

$$\begin{aligned} B &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x\ln(1+x) - x}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2}(\mathbf{1pt}) \\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2} + o(1)\right) \\ B &= \frac{1}{2}.(\mathbf{1pt}). \end{aligned}$$

Exercice 2 : (11.5 pts)

1. **Par parties**, calculer l'intégrale suivante : $I = \int x\sqrt{x+1}dx$.

On pose $\begin{cases} u'(x) = \sqrt{x+1} \\ v(x) = x \end{cases}$, on trouve $\begin{cases} u(x) = \int (x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx = \dfrac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ $.(\mathbf{4 \times 0.25 = 1pt})$

La formule d'intégration par parties nous donne:

$$\begin{aligned} I &= \int u'v = [uv] - \int v'u \qquad (\mathbf{0.5pt}) \\ &= \frac{2}{3}x\,(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\int (x+1)^{\frac{3}{2}}\,dx \\ I &= \frac{2}{3}x\,(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\left[\frac{(x+1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right] + C, (C \in \mathbb{R}).(\mathbf{1.5pt}) \end{aligned}$$

2. Par un **changement de variables**, calculer l'intégrale suivante :

$$J = \int \frac{xdx}{x^4+4}.$$

On pose $y = x^2$, on trouve : $dy = 2xdx$, d'où $xdx = \frac{1}{2}dy$. (**1pt**).
En remplaçant dans J, on trouve:

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{\frac{1}{2}dy}{y^2+4} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}arctg\left(\frac{y}{2}\right)\right] + C \\ J &= \frac{1}{4}arctg\left(\frac{x^2}{2}\right) + C.(\mathbf{1pt}) \end{aligned}$$

3. En utilisant **la forme canonique**, calculer l'intégrale suivante $K = \int \frac{dx}{x^2+10x+30}$.

On pose $P(x) = x^2 + 10x + 30$; $\Delta = -20 < 0$..... (**1pt**).
Forme canonique : On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x+5)^2 + 5.....(\mathbf{1pt})$$

Ce qui fait que :

$$K = \int \frac{dx}{(x+5)^2+5} = \frac{1}{\sqrt{5}}arctg\left(\frac{x+5}{\sqrt{5}}\right) + C.\,(C \in \mathbb{R})\,...(\mathbf{1pt}).$$

4. Résoudre l'EDO d'ordre 2, **à coefficients constants** suivante :

$$y^{''} + \pi^2 y = \sin(\pi x)...(E)$$

Equation without second member (homogenous equation) : $y^{''} + y = 0$

$$(CE) \quad : \quad r^2 + \pi^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad r = \pm i\pi = \alpha \pm i\beta \quad \text{with} \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \pi \end{cases} .(\mathbf{0.5pt})$$

Let us note y_h the solution of the homogeneous equation associated with (E).
Then :

$$y_h(x) = C_1 \cos(\pi x) + C_2 \sin(\pi x); (C_1, C_2 \in \mathbb{R}) .(\mathbf{0.5pt})$$

Equation with second member : One poses

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(\pi x) \\ &= e^{\lambda x}[P_1(x)\cos(\theta x) + P_2(x)\sin(\theta x)] \\ &\quad \text{With} \begin{cases} \lambda = 0 \\ \theta = \pi \\ P_1(x) = 0 \Rightarrow \deg(P_1(x)) = 0 \\ P_2(x) = 1 \Rightarrow \deg(P_2(x)) = 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

Let us note y_p the solution of the homogeneous equation associated with (E).
Then y_p follows the subsequent pattern :

$$y_p(x) = e^{\lambda x} x^m [Q_1(x)\cos(\theta x) + Q_2(x)\sin(\theta x)] .$$

*) Since $\lambda + i\theta = (0 + i\pi)$ is a solution of the (CE), then $m = 1$.
*) Since $\max(\deg(P_1(x)), \deg(P_2(x))) = 0$ then $\deg(Q_1(x)) = \deg(Q_2(x)) = 0$.
That is to say that

$$y_p(x) = x [a\cos(\pi x) + b\sin(\pi x)] \ (\mathbf{0.5pt})$$

where a and b are constants to be determined.
One has :

$$y_p^{'}(x) = x[-a\pi\sin(\pi x) + b\pi\cos(\pi x)] + [a\cos(\pi x) + b\sin(\pi x)] .(\mathbf{0.5pt})$$

Then :

$$\begin{aligned} y_p^{''}(x) &= [-a\pi\sin(\pi x) + b\pi\cos(\pi x)] + x\left[-a\pi^2\cos(\pi x) - b\pi^2\sin(\pi x)\right] + [-a\pi\sin(\pi x) + b\pi\cos(\pi x)] \\ &= 2[-a\pi\sin(\pi x) + b\pi\cos(\pi x)] + x\left[-a\pi^2\cos(\pi x) - b\pi^2\sin(\pi x)\right] (\mathbf{0.5pt}) \end{aligned}$$

Substituting into equation (E), we find :

$$2[-a\pi\sin(\pi x) + b\pi\cos(\pi x)] + x\left[-a\pi^2\cos(\pi x) - b\pi^2\sin(\pi x)\right] + \pi^2 x [a\cos(\pi x) + b\sin(\pi x)] = \sin(\pi x)$$

$$\Rightarrow 2[-a\pi\sin(\pi x) + b\pi\cos(\pi x)] = \sin(\pi x).$$

By identification, we get: $\begin{cases} -2a\pi = 1 \\ 2b\pi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2\pi} \\ b = 0 \end{cases}$ $(\mathbf{0.5pt})$.

Hence :

$$y_p(x) = -\frac{1}{2\pi} x \cos(\pi x).$$

Finally :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 \cos(\pi x) + C_2 \sin(\pi x) - \frac{1}{2\pi} x \cos(\pi x);\ (C_1, C_2 \in \mathbb{R})\,.(\mathbf{0.5pt})$$

Remark
We may verify that the found particular solution is effectively a solution of (E), that way:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -\frac{1}{2\pi} x \cos(\pi x). \\ &\Rightarrow\ y_p'(x) = -\frac{1}{2\pi}\cos(\pi x) + \frac{1}{2} x \sin(\pi x) \\ &\Rightarrow\ y_p''(x) = \frac{1}{2}\sin(\pi x) + \frac{1}{2}\sin(\pi x) + \frac{\pi}{2} x \cos(\pi x) \end{aligned}$$

Replacing in (E) we get :

$$\begin{aligned} y_p''(x) + \pi^2 y_p(x) &= \frac{1}{2}\sin(\pi x) + \frac{1}{2}\sin(\pi x) + \frac{\pi}{2} x \cos(\pi x) + \pi^2 \left[-\frac{1}{2\pi} x \cos(\pi x)\right] \\ &= \sin(\pi x) + \frac{\pi}{2} x \cos(\pi x) - \frac{\pi}{2} x \cos(\pi x) \\ &= \sin(\pi x). \end{aligned}$$