Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen. $1^{ère}$ année LMD (2023/2024).
Faculté des Sciences **M et MI**, durée 1h:30′

Examen Final de remplacement Analyse2

Exercice 1 **(12 points)** Soit la fonction $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{1+x+x^2}$.

1. Trouver le $DLG_2(+\infty)$ de f.
2. On pose $h(x) = f(x) + x - \frac{1}{2}$. Trouver : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.
3. Vérifier que $h(x) > 0$ au voisinage de $+\infty$.
4. Discuter, suivant les valeurs du paramètre a, l'existence et la valeur de la limite: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(h(x)) - \ln\left(\frac{5}{8x}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{a}{x}}$.

Exercice 2 **(08 points)**

Calculer $\int \dfrac{dz}{(1+z)\sqrt{1-z}}$; $z \in]-1,1[$, puis en déduire $\int \dfrac{x^2 dx}{(1+x)\sqrt{1-x}}$; $x \in]-1,1[$.
Indication: utiliser $x^2 = x^2 - 1 + 1$.

Le téléphone portable est strictement interdit. Bon courage.

On donne:

$e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + ... + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + ... + \dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n)$
$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{16}x^3 + o(x^3)$
$\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} ... + \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$

Abou Bekr Belkaid University of Tlemcen. 1^{st} grade LMD (2023/2024).
Faculty of Sciences **M and MI**, duration 1h:30$'$.

Replacement of the Final Exam Calculus2

Exercise 1 (12 points) Let be the function $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{1+x+x^2}$.

1. Find the $GLE_2(+\infty)$ of f.
2. Put $h(x) = f(x) + x - \frac{1}{2}$. Find : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.
3. Verify that $h(x) > 0$ in the neighborhood of $+\infty$.
4. Discuss, according to the values of the parameter a, the existence and the value of the limit :
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(h(x)) - \ln\left(\frac{5}{8x}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{a}{x}}$.

Exercice 2 (08 points)

Calculate $\int \dfrac{dz}{(1+z)\sqrt{1-z}}$; $z \in]-1,1[$, then deduce $\int \dfrac{x^2dx}{(1+x)\sqrt{1-x}}$; $x \in]-1,1[$.
Indication: use $x^2 = x^2 - 1 + 1$.

Cell phones are strictly prohibited. Good luck.

We give:

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n)$
$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$
$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} ... + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$

Exercice 1:

1. Le d.l.g de f à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$: (4 pts)

   Posons $y = \dfrac{1}{x}$ ie $x = \dfrac{1}{y}$ on a $f(x) = e^y - \dfrac{1}{y}\sqrt{1+y+y^2}$

   Quand $x \in V(+\infty)$ alors $y \in V_d(0)$

   Au voisinage de 0, on a:

   $e^y = 1 + y + \dfrac{1}{2}y^2 + \circ\left(y^2\right)$

   Posons $z = y + y^2$

   puisque $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty}\left(y + y^2\right) = 0$ alors

$$(1+z)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{8}z^2 + \frac{1}{16}z^3 + \circ\left(z^3\right)$$

$$\begin{aligned} z &= y + y^2, & z^2 &= y^2 + 2y^3 + \circ\left(y^3\right), \\ z^3 &= y^3 + \circ\left(y^3\right). \end{aligned}$$

   donc

$$\sqrt{1+y+y^2} = 1 + \frac{1}{2}y + \frac{3}{8}y^2 - \frac{3}{16}y^3 + \circ\left(y^3\right),$$

   Par conséquent

$$e^y - \frac{1}{y}\sqrt{1+y+y^2} = -\frac{1}{y} + \frac{1}{2} + \frac{5}{8}y + \frac{11}{16}y^2 + \circ\left(y^2\right)$$

   donc

$$f(x) = -x + \frac{1}{2} + \frac{5}{8x} + \frac{11}{16x^2} + \circ\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

2. On pose $h(x) = f(x) + x - \dfrac{1}{2}$

   (a) Calcul $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} h(x)$: (2 pts)

   $f(x) + x - \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{8x} + \dfrac{11}{16x^2} + \circ\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \Longrightarrow \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} h(x) = 0.$

   (b) Vérifier que $h(x) > 0$ au voisinage de $+\infty$: (2 pts)

   $h(x) = \dfrac{5}{8x} + \dfrac{11}{16x^2} + \circ\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{5}{8x}$

   or $\dfrac{5}{8x} > 0$ au voisinage de $+\infty$ donc $h(x) > 0$ au voisinage de $+\infty$.

(c) Discuter $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{(Log\,(h\,(x)))-Log\left(\dfrac{5}{8x}\right)}{\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{a}{x}}$: **(4 pts)**

$$Log\,(h\,(x))=Log\left(\frac{5}{8x}+\frac{11}{16x^2}+\circ\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}Log\,(h\,(x))-Log\left(\frac{5}{8x}\right)&=Log\left(\frac{h\,(x)}{\frac{5}{8x}}\right)=Log\left(\frac{8xh\,(x)}{5}\right)\\&=Log\left(1+\frac{11}{10x}+\circ\left(\frac{1}{x}\right)\right)\end{aligned}$$

or $Log\left(1+\dfrac{11}{10x}+\circ\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{11}{10x}+\circ\left(\dfrac{1}{x}\right)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{11}{10x}$

$\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{a}{x}=\dfrac{1-a}{x}-\dfrac{1}{6x^3}+\circ\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$

donc $\dfrac{(Log\,(g\,(x)))-Log\left(\dfrac{5}{8x}\right)}{\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{a}{x}}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\frac{11}{10x}}{\frac{1-a}{x}-\frac{1}{6x^3}+\circ\left(\frac{1}{x^3}\right)}$

i. Si $a=1$: $\dfrac{\frac{11}{10}}{1-a-\frac{1}{6x^2}+\circ\left(\frac{1}{x^2}\right)}=\dfrac{\frac{11}{10}}{\frac{-1}{6x^2}+\circ\left(\frac{1}{x^2}\right)}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\frac{11}{10}}{\frac{-1}{6x^2}}$

alors $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{(Log\,(g\,(x)))-Log\left(\dfrac{5}{8x}\right)}{\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{a}{x}}=-\infty.$

ii. si $a\neq1$: $\dfrac{\frac{11}{10}}{1-a-\frac{1}{6x^2}+\circ\left(\frac{1}{x^2}\right)}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\frac{11}{10}}{1-a}$

alors $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{(Log\,(g\,(x)))-Log\left(\dfrac{5}{8x}\right)}{\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{a}{x}}=\dfrac{11}{10\,(1-a)}.$

<u>Exercice 2</u>:

1. Calcul de $\displaystyle\int\frac{dz}{(1+z)\sqrt{1-z}}$ $z\in\,]-1,1[$: **(4 pts)**

   Posons $y=\sqrt{1-z}$ ie $z=1-y^2$ donc $dz=-2ydy$

$$\int \frac{dz}{(1+z)\sqrt{1-z}} = \int \frac{-2ydy}{(2-y^2)\,y} = -2\int \frac{dy}{(2-y^2)}$$

Or

$$\frac{1}{2-y^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}-y} + \frac{1}{\sqrt{2}+y}\right)$$

donc

$$\int \frac{dy}{(2-y^2)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-\ln\left|\sqrt{2}-y\right| + \ln\left|\sqrt{2}+y\right|\right)+C = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+y}{\sqrt{2}-y}\right)+C$$

Par conséquent

$$\int \frac{dz}{(1+z)\sqrt{1-z}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1-z}}{\sqrt{2}-\sqrt{1-z}}\right) + C.$$

2. Calcul de $\int \frac{x^2}{(1+x)\sqrt{1-x}}dx$: (4 pts)

$$\frac{x^2}{(1+x)\sqrt{1-x}} = \frac{x^2-1+1}{(1+x)\sqrt{1-x}} = \frac{x-1}{\sqrt{1-x}} + \frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}}$$

donc $\int \frac{x^2}{(1+x)\sqrt{1-x}}dx = \int \frac{x-1}{\sqrt{1-x}}dx + \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x}}$

or $\int \frac{x-1}{\sqrt{1-x}}dx = -\int \sqrt{1-x}dx = \int y^{\frac{1}{2}}dy = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} + C$

et $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1-x}}\right) + C$

par conséquent

$$\int \frac{x^2}{(1+x)\sqrt{1-x}}dx = \frac{-1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1-x}}\right) + \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} + C$$