Abou Bekr Belkaid University of Tlemcen. LMD (2023/2024).
Faculty of Sciences. L1-S2, M and MI, duration 1h

Continuous Evaluation (for those in debt) - Calculus 2 -

Theoretical question (05 points)

1. **(3 points). Show that** the fuction f defined by $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$ is **not** $C^1(\mathbb{R})$.
2. **(2 points).** This function still admit a $\text{LE}_1(0)$. **Which one**?

Exercise 1 Hyperbolic Functions (08 points)

1. **(6.5 points).** Consider the function f defined on $\mathbb{R}^*$ by $f(x) = x\ sh\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   (a) **Study** the parity of f.
   (b) **Find** the limits of f in $\pm\infty$, and in 0.
   (c) **Show that** f is differentiable on $\mathbb{R}^*$ and calculate its derivative.
   (d) **Show that** for all $y \geq 0$, $th(y) \leq y$.
   (e) **Deduce** the table of variations of f.
2. **(1.5 points). Show that**, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\dfrac{1+th\,(x)}{1-th\,(x)}\right)^n = \dfrac{1+th(nx)}{1-th(nx)}$.

Exercise 2 equivalent functions and LE (07 points)

1. **(2.5 points). Show that** : $\arccos x \underset{1}{\sim} \sqrt{1-x^2}$.
2. **(4.5 points).** Using LE, **find** the following limit : $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x}$.

Note: The use of cell phones is strictly prohibited. Good luck.

Contrôle Continu (pour les endettés) - Analyse 2 -

Question théorique (05 points)

1. **(3 points). Montrer que** la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ n'est **pas** $C^1(\mathbb{R})$.

2. **(2 points).** Cette fonction admet quand même un $\mathrm{DL}_1(0)$, **lequel** ?

Exercice 1 Fonctions Hyperboliques (08 points)

1. **(6.5 points).** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x\ sh\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   (a) **Étudier** la parité de f.
   (b) **Trouver** les limites de f en $\pm\infty$, et en 0.
   (c) **Montrer que** f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.
   (d) **Montrer que**, pour tout $y \geq 0$, $th(y) \leq y$.
   (e) **Déduire** alors le tableau de variations de f.

2. **(1.5 points). Montrer que**, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\dfrac{1 + th\,(x)}{1 - th\,(x)}\right)^n = \dfrac{1 + th(nx)}{1 - th(nx)}$.

Exercice 2 Fonctions équivalentes et DL (07 points)

1. **(2.5 points). Montrer que** : $\arccos x \underset{1}{\sim} \sqrt{1 - x^2}$.

2. **(4.5 points).** En utilisant les DL, **trouver** la limite suivante : $A = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x}$.

Remarque: L'usage des téléphones portables est strictement interdit. Bon courage.

Correction du Contrôle Continu (pour les endettés) - Analyse 2 -

Question théorique (05 points)

1. **Montrer que** la fonction f définie par $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ n'est pas $C^1(\mathbb{R})$.

- La fonction f est **continue** et **dérivable** sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions usuelles continues et dérivables sur $\mathbb{R}^*$. **(0.5 point).**

Et puisque $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0=f(0)$, alors elle est continue en 0. **(0.5 point).** Ce qui fait que f est continue sur tout $\mathbb{R}$.

- Sa dérivée sur $\mathbb{R}^*$ est donnée par:

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2\left[\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]+2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= -\cos\left(\frac{1}{x}\right)+2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (\mathbf{0.5\ point}). \end{aligned}$$

Et sa dérivée en 0 est donnée par la limite : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x-0}=0$ donc $f'(0)=0$. **(0.5 point).**
Ce qui fait que : $f'(x)=\begin{cases} -\cos\left(\frac{1}{x}\right)+2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$

- On voit bien que f' n'est pas continue en 0, puisque $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ n'existe pas. **(0.5 point).**

f est donc **continue** et **dérivable** sur $\mathbb{R}$ mais sa dérivée **n'est pas continue** sur $\mathbb{R}$.
On en conclut que $f\notin C^1(\mathbb{R})$. **(0.5 point).**

2. Cette fonction admet quand même un $\mathrm{DL}_1(0)$ car $f(x)=x.(x\sin\left(\frac{1}{x}\right))$ donc,

   $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x\sin\left(\frac{1}{x}\right))=0$, **(1 point).**

   Ce qui fait que $f(x)=o(x)$. (f est négligeable par rapport à x au voisinage de 0).

   $f(x)=0+o(x)$. C'est le $\mathrm{DL}_1(0)$ de f avec partie polynomiale nulle. **(1 point).**

Exercice 1 (08 points)

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=x\ sh\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

a) Étudier la parité de f.
Remarquons d'abord que $\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à 0. **(0.5 point).**
Ensuite:

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(-x) &= (-x)\ sh\left(\frac{1}{-x}\right)\\ &= x\ sh\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= f(x)\end{aligned}$$

Donc f est paire sur $\mathbb{R}^*$. **(0.5 point).**
b) Étudier le comportement de f en $\pm\infty$, en 0.
On pose $y = \frac{1}{x}$,on trouve: $y \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et : **(0.5 point).**

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{sh(y)}{y}$$

Par la règle de l'hôpital, on trouve:

$$\lim_{y\to 0}\frac{sh(y)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{ch(y)}{1} = 1 \quad (\mathbf{0.5\ point}).$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

On obtient le même résultat par parité lorsque $x \to -\infty$. **(0.5 point).**
Ensuite, par le même changement de variables, on trouve: $y \underset{x\overset{>}{\to}0}{\longrightarrow} +\infty$

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{sh(y)}{y} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{e^y}{2y} - \frac{e^{-y}}{2y}\right)$$

Et comme :

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{e^y}{2y} = +\infty \quad et \quad \lim_{y\to+\infty}\frac{e^{-y}}{2y} = 0.$$

Alors:

$$\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{e^y}{2y} - \frac{e^{-y}}{2y}\right) = +\infty \quad (\mathbf{0.5\ point}).$$

Ou alors (par parité):

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$$

c) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.
f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car $x \mapsto \left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $y \mapsto sh(y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. **(0.5 point).**

La dérivée, obtenue par la formule de dérivation d'une composée, vaut :

$$\begin{aligned}\forall x \quad &\in \quad \mathbb{R}^*,\ f'(x) = sh\left(\frac{1}{x}\right) + x\left(\frac{-1}{x^2}\right) ch\left(\frac{1}{x}\right) \\ &\Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = ch\left(\frac{1}{x}\right)\left[th\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right]. \quad (\mathbf{0.5\ point}).\end{aligned}$$

d) Montrer que pour tout $y \geq 0$, $th(y) \leq y$. En déduire le tableau de variations de f.
Nous allons considérer la fonction $y \to g(y) = th(y) - y$ sur $]0, +\infty[$. **(0.5 point).**
Elle est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée est :

$$\begin{aligned}\forall y \quad &\in \quad]0, +\infty[\,,\ g'(y) = \left[1 - th^2(y)\right] - 1 \\ &= \quad -th^2(y) \leq 0. \qquad (\mathbf{0.5\ point}).\end{aligned}$$

Donc g est décroissante sur $]0, +\infty[$. Et comme $g(0) = 0$, alors $\forall y \geq 0,\ g(y) \leq 0$. **(0.5 point).**
Ce qui fait que f' est négative sur $]0, +\infty[$ et donc f est décroissante sur cet intervalle. **(0.5 point).**

Tableau de variations:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$ $+\infty$	$\Vert$	$+\infty$ $\searrow$	1

$(\mathbf{1\ point})$.

2. Démontrer que, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(\frac{1 + th\,(x)}{1 - th\,(x)}\right)^n = \frac{1 + th(nx)}{1 - th(nx)}$$

Il suffit de remarquer que :$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\frac{1 + th\,(x)}{1 - th\,(x)} \quad &= \quad \frac{1 + \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}{1 - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}} \\ &= \quad \frac{e^x}{e^{-x}} \\ &\Rightarrow \quad \frac{1 + th\,(x)}{1 - th\,(x)} = e^{2x} ...(*) \quad (\mathbf{1\ point}).\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\forall x \quad &\in \quad \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \left(\frac{1 + th\,(x)}{1 - th\,(x)}\right)^n = \left(e^{2x}\right)^n = e^{2nx} \\ \text{Or, d'après } (*),\ e^{2nx} \quad &= \quad \frac{1 + th(nx)}{1 - th(nx)}. \quad \text{Donc:} \\ \forall x \quad &\in \quad \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \left(\frac{1 + th\,(x)}{1 - th\,(x)}\right)^n = \frac{1 + th(nx)}{1 - th(nx)} \quad (\mathbf{0.5\ point}).\end{aligned}$$

Exercice 2 Fonctions équivalentes et DL (07 points)

1. **Montrer que** : $\arccos x \underset{1}{\sim} \sqrt{1-x^2}$.

   Puisque $\sin y \underset{0}{\sim} y$ **(0.5 point)** et que $\lim_{x\to 1} \arccos x = 0$, **(0.5 point), a**lors $\sin(\arccos x) \underset{1}{\sim} \arccos x$. **(0.5 point).**

   Et puisque $\forall x \in [-1,1], \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ **(0.5 point)**, alors : $\sqrt{1-x^2} \underset{1}{\sim} \arccos x$. **(0.5 point).**

2. En utilisant les DL, **trouver** la limite suivante : $A = \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x}$.

Puisque le dénominateur est d'ordre 4 au minimum, nous allons développer le numérateur à l'ordre 4 aussi. On a le $\mathrm{DL}_4(0)$ de la fonction: $f(x) = \sin(x)$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \qquad (\textbf{1 point}).$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\sin^2(x) &= \left[x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right]\left[x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right] \\
&= x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4). \qquad (\textbf{1 point}). \\
&\Rightarrow \sin^2(x) - x^2 = -\frac{x^4}{3} + o(x^4). \quad (\textbf{0.5 point}).
\end{aligned}$$

Et:

$$x^2 \sin^2 x = x^2\left[x^2 + o(x^2)\right] = x^4 + o(x^4). \qquad (\textbf{1 point}).$$

Donc, $A = \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{-\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = -\dfrac{1}{3}$. **(1 point).**