TD N° 3 de Mécanique

Cinématique D'un Point Matériel

Exercice 1

Un corps se déplace sur l'axe des x selon la relation $x(t)=2t^3+5t^2+5$

a- Etablir la vitesse $v(t)$ et l'accélération $a(t)$ à chaque instant t
b- Calculer la position du corps, sa vitesse et son accélération instantanée pour $t_1=2s$ et $t_2=3s$
c- Déduire la vitesse et l'accélération moyenne du corps entre $t_1$et t_2

Exercice 2

Les coordonnées x et y d'un point mobile M dans le plan (Oxy) varient avec le temps t selon les relations suivantes : $x=t+1$ et $y=(t^2 /2)+2$

Trouver :

a- L'équation de la trajectoire
b- Les composantes de la vitesse et de l'accélération et leurs modules.
c- Les accélérations: normale a_N et tangentielle a_T et en déduire le rayon de courbure
d- La nature du mouvement

Exercice 3

Une particule se déplace sur une trajectoire dont l'équation de la trajectoire est $y=x^2$ de telle sorte qu'à chaque instant $v_x=v_0=cst$. Si t=0, $x_0=0$.

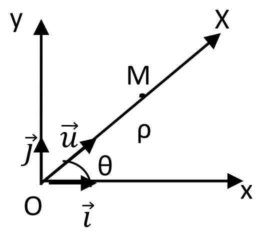
Déterminer :

a- Les coordonnées x(t) et y(t) de la particule.
b- La vitesse et l'accélération de la particule.
c- Les accélérations normale et tangentielle ainsi que le rayon de courbure.

Exercice 4

A) Un point matériel M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x,y).

1. Ecrire x et y en fonction des coordonnées polaires ρ et θ.
2. Donner l'expression du vecteur unitaire $\vec{u}$ en fonction des vecteurs unitaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.
3. Calculer $d\vec{u}/d\theta$, que représente ce vecteur ?



B) Si la position du point M est donnée par $\begin{cases} \overrightarrow{OM} = t^2\vec{u} \\ \theta = \omega t \end{cases}$ (ω constante)

Trouver l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ en coordonnées polaires.

<u>Exercice 5</u>

Un point matériel M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z).

1. Ecrire la relation entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées cylindriques (à l'aide d'un schéma).
2. Ecrire le vecteur position en coordonnées cylindriques et déduire le vecteur vitesse dans le même système de coordonnées.
3. Si la position du point est repérée en coordonnées cylindriques par $\begin{cases} \rho = 4t^2 \\ \theta = \omega t \\ z = \sqrt{t} \end{cases}$

Retrouver l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ en coordonnées cylindriques.

<u>Exercice 6</u>

Le mouvement d'un corps est définit par les composants de la vitesse suivantes :

$$\begin{cases} v_x = R\omega\cos(\omega t) \\ v_y = R\omega\sin(\omega t) \end{cases}$$

Sachant que ω est constante et à t=0, le mobile se trouve <u>au point M (0, R),</u> Déterminer :

1. Les composantes du vecteur accélération et son module.
2. Les composantes tangentielle et normale de l'accélération et déduire le rayon de courbure.
3. Les composantes du vecteur position et déduire l'équation de la trajectoire.
4. Quelle est la nature du mouvement?

<u>Exercice 7</u>

Un point matériel M se déplace sur l'axe OX avec une accélération $\vec{a} = a\,\vec{\imath}$; avec a > 0.

1-Déterminer le vecteur vitesse sachant que v (t=0)= v_0 .

2-Déterminer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ sachant que x(t=0)=x_0.

3-Montrer que $v^2 - v^2 = 2a(x - x_0)$

4-quelle est la condition que doit vérifier $\overrightarrow{a}.\vec{v}$ pour que le mouvement soit uniformément accéléré? Ou retardé ?

<u>Exercice 8</u>

La différentielle du vecteur $\vec{r}$, $d\vec{r} = d\vec{l} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$ peut se mettre en coordonnées cylindriques sous la forme $d\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}\,d\rho + \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\,d\theta + \frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\,dz$.

1. Evaluer en utilisant les formules de passage entre les deux systèmes de coordonnées, les vecteurs $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}$,$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}$ et $\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}$.
2. En déduire les vecteurs unitaires $\overrightarrow{U_\rho}$, $\overrightarrow{U_\theta}$ et $\overrightarrow{U_z}$(coordonnées cylindriques) en fonction de $\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\ et\ \vec{k}$ (coordonnées cartésiennes), vérifier qu'ils sont orthogonaux.
3. Ecrire $\vec{A} = 2x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} - 2z\vec{k}$ en coordonnées cylindriques.

CORRIGE DES EXERCICES

Exercice 1

a- Nous avons $x(t)=2t^3+5t^2+5$donc :

-La visse serait

$v(t) = \frac{dx}{dt} = 6t^2+10t$

-l'accélération serait

$a(t)=\frac{dv(t)}{dt}=12t+10$

b- La position du corps, à l'instant **t_1=2s**, ainsi que sa vitesse et son accélération instantanée

La position

$x(2)= 2(2)^3+5(2)^2+5=41m$

La vitesse instantanée

$v(2)=6(2)^2+10(2)=44m/s$

L'accélération instantanée

$a(2)=12(2)+10=34m/s^2$

-La position du corps, à l'instant **t_2=3s**, ainsi que sa vitesse et son accélération instantanée

La position

$x(3)= 2(3)^3+5(3)^2+5=104m$

La vitesse instantanée

$v(3)=6(3)^2+10(3)=84m/s$

L'accélération instantanée

$a(3)=12(3)+10=46m/s^2$

c- On déduit la vitesse et l'accélération moyenne du corps entre t_1 et t_2

La vitesse moyenne

$$v_{moy} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \Rightarrow v_{moy} = \frac{104 - 41}{3 - 2} = 63m/s$$

L'accélération moyenne

$$a_{moy} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} \Rightarrow a_{moy} = \frac{84 - 44}{3 - 2} = 40m/s^2$$

EXERCICE 2

Les coordonnées d'un point mobile M dans le plan (oxy) s'écrivent

$x(t)=t+1$ et $y(t)=(t^2/2)+2$

a- L'équation de la trajectoire s'écrit alors

(Pour trouver l'équation de la trajectoire, il suffit de trouver la relation qui lie x(t) et y(t). Pour cela, on déduit le temps, d'une équation, de x(t) ou de y(t), et on le remplace dans l'autre équation)

Ici, on va écrire t en fonction, de x

$t=x-1$ donc $y = \frac{(x-1)^2}{2} + 2 = \boldsymbol{\frac{x^2}{2} - x + \frac{5}{2}}$

L'équation de la trajectoire est

$$\mathbf{y(x) = \frac{x^2}{2} - x + \frac{5}{2}}$$

b- Les composantes de la vitesse et de l'accélération

- La vitesse :

$\overrightarrow{\mathrm{v(t)}} = \mathrm{v_x(t)}\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{v_y(t)}\vec{\mathrm{j}}$

$$\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} = 1 \\ v_y(t) = \dfrac{dy(t)}{dt} = t \end{cases}$$

La vitesse s'écrit $\overrightarrow{\mathbf{v(t)}} = \vec{\mathbf{i}} + \mathbf{t}\vec{\mathbf{j}}$

Le module de la vitesse $|\vec{v}(t)| = \sqrt{1+t^2}$

-l'accélération

$\overrightarrow{\mathrm{a(t)}} = \mathrm{a_x(t)}\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{a_y(t)}\vec{\mathrm{j}}$

$$\begin{cases} a_x(t) = \dfrac{dv_x(t)}{dt} = 0 \\ a_y(t) = \dfrac{dv_y(t)}{dt} = 1 \end{cases}$$

L'accélération s'écrit $\overrightarrow{\mathbf{a(t)}} = \vec{\mathbf{j}}$

Le module de l'accélération $|\vec{a}(t)| = 1$

c- les accélérations normales et tangentielles

-L'accélération tangentielle

$a_T = \frac{d|\overrightarrow{v(t)}|}{dt}$avec$|\overrightarrow{v(t)}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{1+t^2}$

$$a_T = \frac{d(\sqrt{1+t^2})}{dt} = \frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}$$

$$a_T = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

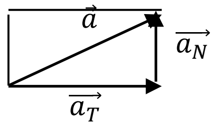
$\boldsymbol{(U^n)' = n\,U'\,U^{n-1}}$

-L'accélération normale

Les accélérations a_N et a_T sont les composantes normales et tangentielles de l'accélération $\vec{a}$

$(\vec{a} = a_T\overrightarrow{U_T} + a_N\overrightarrow{U_N} \quad \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a_T^2 + a_N^2}})$

Nous avons la forme d'un triangle droit, en appliquant la relation de Pitagort



$\boldsymbol{a^2 = a_T^2 + a_N^2}$

Donc $\quad a_N^2 = a^2 - a_T^2$ ou $|\vec{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a_T^2 + a_N^2}}$

$$a_N^2 = 1 - \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 = 1 - \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$a_N^2 = \frac{1}{1+t^2}$$

Donc $a_N = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{v}$

Le rayon de courbure

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{1}{v} \Rightarrow R = v^3 = (1+t^2)^{\frac{3}{2}}$$

d- La nature du movement

$$\overrightarrow{a(t)}.\overrightarrow{v(t)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = 1(0) + t(1) = t > 0$$

Le mouvement alors est *uniformément accéléré*

<u>Exercice 3 :</u>

Une particule se déplace sur une trajectoire dont l'équation de la trajectoire est $y=x^2$ de telle sorte qu'à chaque instant $v_x=v_0=cst$. Si $t=0$, $x_0=0$.

a- Cherchons Les coordonnées x(t) et y(t) de la particule.

Nous avons suivant (Ox) : $v_x = v_0 = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t v_0 dt$

$\Rightarrow \boldsymbol{x(t)} = v_0 t$

D'autre part : y=x^2$\Rightarrow y(t) = v_0^2 t^2$

Donc$\begin{cases} \boldsymbol{x(t)} = v_0 t \\ y(t) = v_0^2 t^2 \end{cases}$

b- La vitesse et l'accélération de la particule.

La vitesse

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = v_0 \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = 2v_0^2 t \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v(t)} = v_0 \vec{\imath} + 2v_0^2 t \vec{\jmath}$$

Le module de la vitesse $\left|\overrightarrow{v(t)}\right| = \sqrt{v_0^2 + 4v_0^4 t^2}$

L'accélération

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = 0 \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = 2v_0^2 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{a(t)} = 2v_0^2 \vec{\jmath}$$

Le module de l'accélération $\left|\overrightarrow{a(t)}\right| = \sqrt{(2v_0^2)^2} = 2v_0^2$

Les accélérations normale et tangentielle

L'accélération tangentielle

$$a_T = \frac{d\left|\overrightarrow{v(t)}\right|}{dt} = \frac{4v_0^4 t}{\sqrt{v_0^2 + 4v_0^4 t^2}}$$

L'accélération normale

$$a_N^2 = a^2 - a_T^2 \Rightarrow a_N^2 = 4v_0^4 - \frac{16v_0^8 t^2}{v_0^2 + 4v_0^4 t^2}$$

$$\Rightarrow a_N^2 = \frac{4v_0^6}{v_0^2 + 4v_0^4 t^2}$$

Donc

$$a_N = \frac{2v_0^3}{\sqrt{v_0^2 + 4v_0^4 t^2}} = \frac{2v_0^3}{v}$$

$$((a^x)^y = a^{x.y} \quad et \quad a^x . a^y = a^{x+y})$$

Le rayon de courbure

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{2v_0^3}{v} \Rightarrow R = \frac{v^3}{2v_0^3}$$

EXERCICE 4

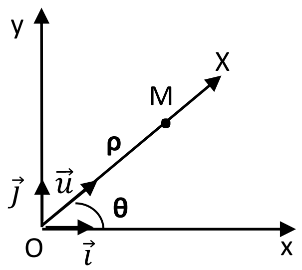
A) Un point matériel M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x,y)

1- Trouver x et y en fonction des coordonnées polaires ρ et θ ??

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

D'autre part $\overrightarrow{OM}$ s'écrit par projection comme :

$$\overrightarrow{OM} = \rho cos\theta\vec{\imath} + \rho sin\theta\vec{\jmath}$$



$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \begin{cases} x = \rho\, cos\theta \\ y = \rho\, sin\theta \end{cases}$$

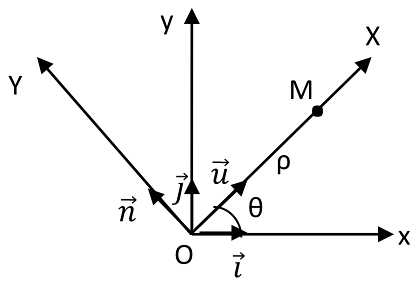
2- Le vecteur unitaire $\vec{u}$ en fonction des vecteurs unitaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$:

On a $\overrightarrow{OM} = |\overrightarrow{OM}|\vec{u} = \rho\vec{u} = \rho cos\theta\vec{\imath} + \rho sin\theta\vec{\jmath}$

Donc $\vec{u} = cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath}$

Et $\quad \vec{n} = -sin\theta\vec{\imath} + cos\vec{\jmath}$

$\vec{n}$ et $\vec{u}$ représentent les vecteurs unitaires de la base des coordonnés polaires.



4. Calculer l'expression $d\vec{u}/_{d\theta}$, que représente ce vecteur ?

$$\frac{d\vec{u}}{d\theta} = \frac{d(cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath})}{d\theta} = -sin\theta\vec{\imath} + cos\vec{\jmath} = \vec{n}$$

$\boldsymbol{\frac{d\vec{u}}{d\theta}}$ représente un vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{u}$ dans le sens directe.

B) La position du point M est donnée par $\begin{cases} \overrightarrow{OM} = t^2\vec{u} \\ \theta = \omega t \end{cases}$ $\quad (\omega \;\text{ constante})$

L'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ en coordonnées polaires est :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(t^2\vec{u})}{dt} = 2t\vec{u} + t^2\frac{d\vec{u}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{u}}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = \vec{n}.\omega$$

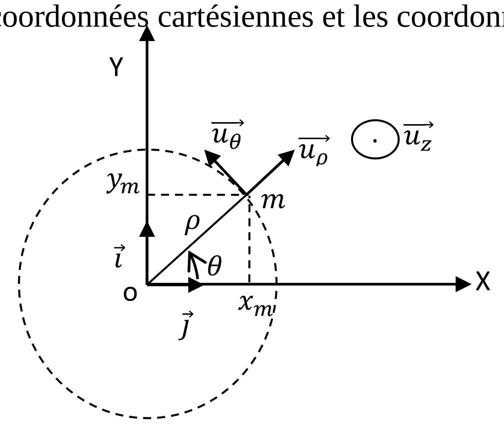
$$\boldsymbol{\vec{v} = 2t.\vec{u} + t^2.\omega.\vec{n}}$$

EXERCICE 5

Un point matériel M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z).

1. Ecrire la relation entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires.

$$\begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sin\theta \\ z = z_M \end{cases}$$



2. Trouver l'expression du vecteur position et déduire le vitesse $\vec{v}$ du point M en coordonnées cylindriques.

$$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{U_\rho} + z\overrightarrow{U_z}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{U_\rho} + \rho\frac{d\overrightarrow{U_\rho}}{dt} + \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{U_z} + z\frac{d\overrightarrow{U_z}}{dt}$$

$$on\ a\ \frac{d\overrightarrow{U_z}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \dot{\rho}\overrightarrow{U_\rho} + \rho\frac{d\theta}{dt}\frac{d\overrightarrow{U_\rho}}{d\theta} + \dot{z}\overrightarrow{U_z}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{\rho}\overrightarrow{U_\rho} + \rho\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{U_z}$$

3. Le vecteur vitesse $\vec{v}$ du point M en coordonnées cylindriques :

On a $\begin{cases} \rho = 4t^2 \\ \theta = \omega t \\ z = \sqrt{t} \end{cases}$ alors a $\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = 8t \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \frac{dz}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \end{cases}$

$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{\rho}\overrightarrow{U_\rho} + \rho\dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{U_\rho}}{d\theta} + \dot{z}\overrightarrow{U_z} = 8t\overrightarrow{U_\rho} + 4t^2.\omega.\overrightarrow{U_\theta} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\overrightarrow{U_z}$$

Exercice 6

$\begin{cases} v_x = R\omega\cos(\omega t) \\ v_y = R\omega\sin(\omega t) \end{cases}$

Sachant qu'à t=0, le mobile se trouve à l'origine O (0,0),

1. les composantes du vecteur accélération et son module.

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = -R\omega^2 sin\,(\omega t) \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = R\omega^2\cos(\omega t) \end{cases}$$

$$[\vec{a}] = \sqrt{(-R\omega^2 sin\,(\omega t))^2 + (R\omega^2 cos\,(\omega t))^2} = R\omega^2$$

2. Les composantes tangentielle et normale de l'accélération et déduire Le rayon de courbure.

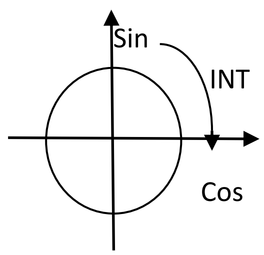
L'accélération tangentielle :

$$[\vec{v}] = \sqrt{(R\omega\ \ cos(\omega t))^2 + (R\omega\, sin\,(\omega t))^2} = R\omega$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{dR\omega}{dt} \Rightarrow a_T = 0$$

L'accélération normale

$a_N = \frac{v^2}{R} = a = R\omega^2$ car $a_T = 0$ et $R = \frac{v^2}{a_N} = \frac{R^2\omega^2}{R\omega^2}$=R



et la rayon de courbure est R

3. Les composantes du vecteur position

$$\begin{cases} v_x = R\omega\cos(\omega t) \\ v_y = R\omega\sin(\omega t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = R\omega\cos(\omega t) \\ \dfrac{dy}{dt} = R\omega\sin(\omega t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dx = R\omega\cos(\omega t)dt \\ dy = R\omega\sin(\omega t)\,dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int dx = R\int \omega\cos(\omega t)dt \\ \int dy = R\int \omega\sin(\omega t)\,dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = R\sin(\omega t) \\ y = -R\cos(\omega t) \end{cases}$$

L'équation de la trajectoire.

$$x^2 + y^2 = R^2 sin^2\omega t + R^2 cos^2\omega t \Rightarrow x^2 + y^2 = R^2$$

4. La nature du mouvement

L'accélération $a=a_N$ et l'équation de la trajectoire est $x^2 + y^2 = R^2$ donc le mouvement est circulaire uniforme.

Exercice7

Un point matériel M se déplace sur l'axe OX avec une accélération $\vec{a} = a\,\vec{\imath}$ avec a > 0.
1-Déterminer le vecteur vitesse sachant que v (t=0)= v_0 .

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = a\int_0^t d\,t$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{v - v_0 = a\,t} \quad (1)$$

Donc $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{a\,t + v_0})\vec{\boldsymbol{\imath}}$

2-Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ sachant que x(t=0)=x_0.

$$v = \frac{dx}{dt} = a\,t + v_0 \quad \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t (a\,t + v_0)d\,t = a\int_0^t td\,t\, + v_0\int_0^t d\,t$$

$$\Rightarrow x - x_0 = \left[a\frac{t^2}{2} + v_0 t\right]_0^t$$

$$\boldsymbol{\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}}$$

$$\boldsymbol{\int \frac{dx}{x} = ln\,x}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{1}{2}\,at^2 + v_0 t + x_0} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\, \boldsymbol{a}\, \boldsymbol{t}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{v_0 t} + \boldsymbol{x_0}\right)\vec{\boldsymbol{\imath}}$$

3. Montrons que $v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$

(1)⇒ $t = \frac{\boldsymbol{v - v_0}}{a}$ dans (2) $x - x_0 = \frac{1}{2}\, a \left(\frac{\boldsymbol{v - v_0}}{a}\right)^2 + v_0 \left(\frac{\boldsymbol{v - v_0}}{a}\right) = \frac{v^2 + v_0^2 - 2vv_0}{2a} + \frac{vv_0 - v_0^2}{a}$

$$\Rightarrow\ x - x_0 = \frac{v^2 + v_0^2 - 2vv_0}{2a} + \frac{2vv_0 - 2v_0^2}{2a}$$

$$\Rightarrow\ x - x_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

Donc $2a(x - x_0) = v^2 - v_0^2$

1- Pour que le mouvement soit uniformément accéléré, il faut que $\vec{a}.\vec{v}$ soit positif.
Pour que le mouvement soit uniformément retardé, il faut que $\vec{a}.\vec{v}$ soit négatif.

Exercice 8

La différentielle du vecteur $\vec{r}$, $d\vec{r} = d\vec{l} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$ peut se mettre en coordonnées cylindriques sous la forme $d\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}\, d\rho + \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\, d\theta + \frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\, dz$.

1. On cherche les vecteurs $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}$, $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}$ et $\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}$.

On a $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

- Le vecteur de déplacement en coordonnées cartésiennes (x, y, z) :

$$d\vec{r} = d\vec{l} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$$

- Le vecteur de déplacement en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) :

$$d\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}\, d\rho + \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\, d\theta + \frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\, dz$$

Les relations qui lient les coordonnées cartésiennes (x, y, z) aux coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) sont :

$$\begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sin\theta \\ z = z_M \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} dx = d\rho . cos\theta - \rho . \sin\theta . d\theta \\ dy = d\rho . sin\theta + \rho . cos\theta . d\theta \\ dz = dz_M \end{cases}$$

$$\Longrightarrow d\vec{r} = d\vec{l} = (d\rho.cos\theta - \rho.\sin\theta.d\theta)\vec{\imath} + (d\rho.sin\theta + \rho.cos\theta.d\theta)\vec{\jmath} + dz\vec{k}$$

$$\Longrightarrow d\vec{r} = (cos\theta.\vec{\imath} + sin\theta.\vec{\jmath})d\rho + (-\rho sin\theta\vec{\imath} + \rho.cos\theta.\vec{\jmath})d\theta + dz\vec{k}............(1)$$

$$\Longrightarrow d\vec{r} = \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}\right) d\rho + \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right) d\theta + \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\right) dz..(2)$$

Par identification entre (1) et (2) on aura :

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\rho} = cos\theta.\vec{\imath} + sin\theta.\vec{\jmath} \\ \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = -\rho sin\theta\vec{\imath} + \rho.cos\theta.\vec{\jmath} \\ \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial z} = \vec{k} \end{cases}$$

2. En déduire les vecteurs unitaires $\overrightarrow{U_\rho}$, $\overrightarrow{U_\theta}$ et $\overrightarrow{U_z}$ (coordonnées cylindriques) en fonction de $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ (coordonnées cartésiennes) :

Le vecteur de déplacement en coordonnées cylindriques s'écrit:

$$d\vec{r} = d\rho\overrightarrow{U_\rho} + \rho d\theta\overrightarrow{U_\theta} + dz\vec{k}..............................(3)$$

$$(2) \text{ et } (3) \Longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{U_\rho} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho} = cos\theta.\vec{\imath} + sin\theta.\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{U_\theta} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = -sin\theta\vec{\imath} + cos\theta.\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{U_z} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial z} = \vec{k} \end{cases}$$

<u>Remarque</u> :

On peut écrire les vecteurs unitaires de la base des coordonnées cartésiennes en fonction des vecteurs unitaires de la base des coordonnées cylindrique à partir du tableau ci-dessous:

	$\vec{\imath}$	$\vec{\jmath}$	$\vec{k}$
$\overrightarrow{u_\rho}$	Cosθ	Sinθ	0
$\overrightarrow{u_\theta}$	-sinθ	Cosθ	0
$\overrightarrow{u_z}$	0	0	1

$$\Longrightarrow \begin{cases} \vec{\imath} = \cos\theta\overrightarrow{u_\rho} - \sin\theta\,\overrightarrow{u_\theta} \\ \vec{\jmath} = \sin\theta\overrightarrow{u_\rho} + \cos\theta\overrightarrow{u_\theta} \\ \vec{k} = \overrightarrow{u_z} \end{cases}$$

3. Vérifiant qu'ils sont orthogonaux ?

$$\Longrightarrow \begin{cases} |\overrightarrow{U_\rho}| = \sqrt{cos\theta^2 + sin\theta^2} = 1 \\ |\overrightarrow{U_\theta}| = \sqrt{(-sin\theta)^2 + cos\theta^2 = 1} \\ |\overrightarrow{U_z}| = |\vec{k}| = 1 \end{cases}$$

D'où $\overrightarrow{U_\rho}, \overrightarrow{U_\theta}$ et $\overrightarrow{U_z}$, sont des vecteurs unitaires.

On a $\overrightarrow{U_\rho}.\overrightarrow{U_\theta} = 0, \overrightarrow{U_\rho}.\overrightarrow{U_z} = 0$ et $\overrightarrow{U_z}.\overrightarrow{U_\theta} = 0$

Donc $\overrightarrow{U_\rho}, \overrightarrow{U_\theta},$ et $\overrightarrow{U_z}$ sont des vecteurs orthogonaux.

Par conséquent les vecteurs $\overrightarrow{U_\rho}, \overrightarrow{U_\theta}, \overrightarrow{U_z}$ forment un repère orthonormé.

4. Ecrire $\vec{A} = 2x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} - 2z\vec{k}$ en coordonnées cylindriques.

On a $\begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sin\theta \\ z = z_M \end{cases}$ et $\begin{cases} \vec{\imath} = \cos\theta\overrightarrow{u_\rho} - \sin\theta\,\overrightarrow{u_\theta} \\ \vec{\jmath} = \sin\theta\overrightarrow{u_\rho} + \cos\theta\overrightarrow{u_\theta} \\ \vec{k} = \overrightarrow{u_z} \end{cases}$

Donc $\vec{A} = 2x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} - 2z\vec{k}$ s'écrit :

$$\Longrightarrow \vec{A} = 2\rho cos\theta\left(\cos\theta\overrightarrow{u_\rho} - \sin\theta\,\overrightarrow{u_\theta}\right) + \rho sin\theta\left(\sin\theta\overrightarrow{u_\rho} + \cos\theta\overrightarrow{u_\theta}\right) - 2z\vec{k}$$

$$\Longrightarrow \vec{A} = (2\rho cos\theta^2 + \rho sin\theta^2)\overrightarrow{u_\rho} + (-2\rho\cos\theta\sin\theta + \rho\text{os}\theta\sin\theta)\overrightarrow{u_\theta} - 2z\vec{k}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\vec{A} = (cos\theta^2 + 1)\rho\overrightarrow{u_\rho} - \rho\cos\theta\sin\theta\overrightarrow{u_\theta} - 2z\overrightarrow{u_z}}$$