University of Tlemcen
Faculty of Science
Department of Mathematic

Academic Year: 2023/2024
1st Year LMD-M et MI

TD N°2 de la mécanique

Analyse vectorielle

Exercice 1

$\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\ et \vec{k}$ étant les vecteurs unitaires des axes rectangulaire Oxyz, on considère les vecteurs

$$\vec{r_1}=\vec{\imath}+3\vec{\jmath}-2\vec{k} \qquad \vec{r_2}=4\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+2\vec{k} \qquad \text{et} \qquad \vec{r_3}=3\vec{\imath}-\vec{\jmath}+2\vec{k}$$

1. Représenter graphiquement ces 3 vecteurs.
2. Calculer leurs modules.
3. Calculer les produits $\vec{r_1}\cdot\vec{r_2}$ et $\vec{r_1}\wedge\vec{r_2}$.

Exercice 2

On donne les trois vecteurs $\vec{V_1}(1, 1, 0)$, $\vec{V_2}(0, 1, 0)$ et $\vec{V_3}$ (0, 0, 2).

1. Calculer les normes $\|\vec{V_1}\|$, $\|\vec{V_2}\|$et $\|\vec{V_3}\|$, en déduire les vecteurs unitaires $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$ des directions respectivement de $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ et de $\vec{V_3}$.

2. Calculer cos $(\widehat{\vec{v_1},\vec{v_2}})$, sachant que l'angle correspondant est compris entre 0 et π.

3. Calculer le produit mixte $\vec{v_1}.(\vec{v_2}\wedge\vec{v_3})$. Que représente ce produit ?

Exercice 3

On considère dans l'espace rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ les points A(2, 0,0), B(2, −2, 0) et C(2, 3, −1).

1. Calculer le produit vectoriel$\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$
2. Calculer l'aire du triangle OAB.
3. Calculer le produit mixte $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$, En déduire le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs

Exercice 4

Soit un vecteur $\vec{U}=(t\vec{\imath}+3\vec{\jmath})/(\sqrt{t^2+9})$

1. Montrer que $\vec{U}$ est un vecteur unitaire ?
2. Calculer sa dérivée par rapport au temps ?

Exercice supplémentaire

Soient trois vecteurs $\vec{A},\ \vec{B}\ et\ \vec{C}$, tels que ; $\vec{A}=-2\vec{\imath}+\vec{\jmath}+3\vec{k}$, $\vec{B}=2\vec{\imath}-\vec{\jmath}+\vec{k}$, $\vec{C}=x\vec{\imath}+1\vec{\jmath}+z\vec{k}$

1- Calculer x et z pour que le vecteur $\vec{C}$ soit :

a- Parallèle à $\vec{A}$ b- Parallèle à $\vec{B}$

2- si $\vec{C}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$. Calculer x, y et z pour que le vecteur $\vec{C}$ soit perpendiculaire à $\vec{A}$et $\vec{B}$ en même temps.

University of Tlemcen
Faculty of Science
Department of Mathematic

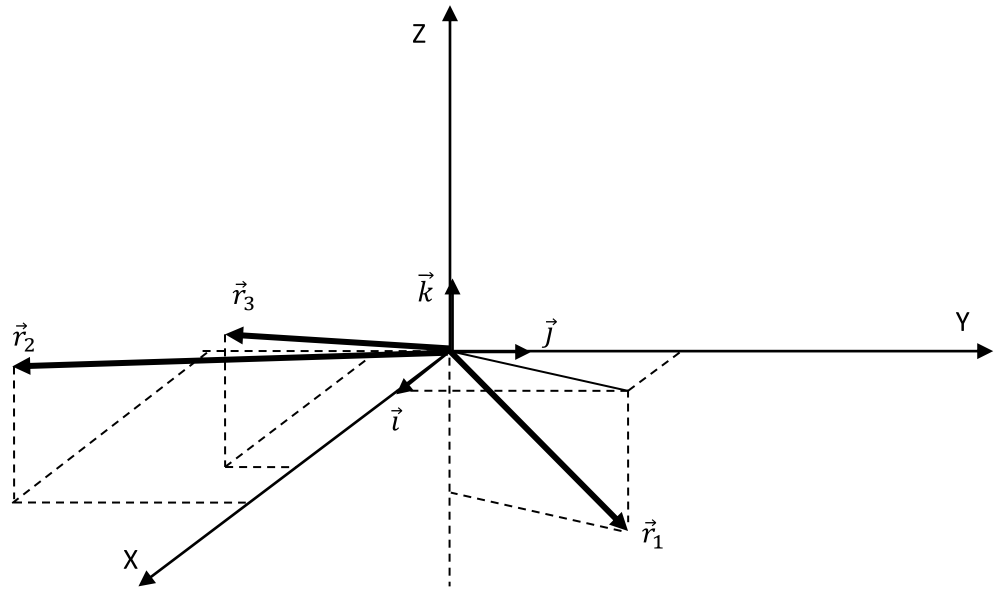
Academic Year: 2023/2024
1st Year LMD-M et MI

Corrigés des exercices

Exercice 1

On a $\vec{r_1} = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 2\vec{k}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ $\quad \vec{r_2} = 4\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}\begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix}$ $\quad$ et $\quad \vec{r_3} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$

1- La représentation des vecteurs $\vec{r_1}$, $\vec{r_2}$ et $\vec{r_3}$:



2- Les modules :

$$\vec{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{A}| = \|\vec{A}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$|\vec{r_1}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{r_2}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} = \sqrt{16+4+4} = \sqrt{24}$$

$$|\vec{r_1}| = \sqrt{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$

3- $\vec{r_1}.\vec{r_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 4 - 6 - 4 = -6$

Et $\vec{r_1} \wedge \vec{r_2} = \begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 1 & 3 & -2\\ 4 & -2 & 2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3 & -2\\ -2 & 2\end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix}1 & -2\\ 4 & 2\end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & -2\end{vmatrix}\vec{k}$

$$\Rightarrow \vec{r_1} \wedge \vec{r_2} = (3.2 - (-2.(-2)))\vec{\imath} - (1.2 - ((-2).4))\vec{\jmath} + (1.(-2) - (3.4))$$

$$\Rightarrow \vec{r_1} \wedge \vec{r_2} = 2\vec{\imath} - 10\vec{\jmath} - 14\vec{k}$$

Exercice 2 :

On donne les trois vecteurs $\overrightarrow{V_1}(1, 1, 0)$, $\overrightarrow{V_2}(0, 1, 0)$ et $\overrightarrow{V_3}$ $(0, 0, 2)$.

1. Calculer les normes $\|\overrightarrow{V_1}\|$, $\|\overrightarrow{V_2}\|$et $\|\overrightarrow{V_3}\|$:

Calculons les normes des différents vecteurs et les vecteurs unitaires de leurs directions respectives.

$$\|\overrightarrow{V_1}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2} \Rightarrow \overrightarrow{v_1} = \frac{\overrightarrow{V_1}}{\|\overrightarrow{V_1}\|};\ \overrightarrow{v_1}(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$$

$$\|\overrightarrow{V_2}\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1 \Rightarrow \overrightarrow{v_2} = \frac{\overrightarrow{V_2}}{\|\overrightarrow{V_2}\|} = \vec{\jmath}\,;\ \overrightarrow{v_2}(0, 1, 0)$$

$$\|\overrightarrow{V_3}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow \overrightarrow{v_3} = \frac{\overrightarrow{V_3}}{\|\overrightarrow{V_3}\|};\quad \overrightarrow{v_3}(0, 0, 1)$$

2. On calcule $\cos\,(\widehat{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}})$ comme suit :

$$\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad et\ \overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2} = \|\overrightarrow{v_1}\|.\|\overrightarrow{v_2}\|.\cos(\widehat{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}})$$

$$\Rightarrow \cos\left(\widehat{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. Nous avons :

$$\overrightarrow{v_1}\,.\,\overrightarrow{v_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\overrightarrow{v_2}\ \wedge \overrightarrow{v_3} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 0\vec{k} = \vec{\imath}$$

$$\Rightarrow\ \overrightarrow{v_2}\ \wedge \overrightarrow{v_3} = \vec{\imath}(1,0,0)$$

$$\overrightarrow{v_1}\,.\,(\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_3}) = 1 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 0 = 1$$

- Le premier terme représente le produit scalaire entre les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$, il est égal au produit du module de la projection de $\overrightarrow{v_1}$ sur $\overrightarrow{v_2}$ multiplié par le module de $\overrightarrow{v_2}$.
- Le deuxième terme est le produit vectoriel entre $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$.
- Le dernier terme est le produit mixte entre $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ et qui n'est d'autre que le volume du parallélépipède construit sur la base des trois vecteurs.

Exercice 6

A(2, 0,0), B(2, −2, 0) et C(2, 3, −1).

1. Le produit vectoriel $\overrightarrow{OA}\Lambda\overrightarrow{OB}$

$$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\ donc\ \overrightarrow{OA}\Lambda\overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -4\vec{k}$$

L'aire du triangle (OAB) est la moitier de l'aire du parallélogramme formé par les deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$

S(OAB)=$\frac{|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}|}{2} = \frac{4}{2} = 2$

2. Le produit mixte $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$, et le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs

$$(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}).\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 4$$

Donc le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs = 4.

Exercice 4 :

Soit un vecteur $\vec{U} = (t\vec{\imath} + 3\vec{\jmath})/(\sqrt{t^2+9})$

1- $\vec{U}$ est un vecteur unitaire ?

Il faut vérifier que $|\vec{U}| = 1$ **d'où** $|\vec{U}| = \sqrt{\frac{1}{(t^2+9)}(t^2+9)}$=1

Donc $\vec{U}$ est un vecteur unitaire.

2- La dérivée de $\overrightarrow{U}$:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{t}{(\sqrt{t^2+9})}\right)\vec{\imath} + \frac{d}{dt}\left(\frac{3}{(\sqrt{t^2+9})}\right)\vec{\jmath}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{u}}{dt} = \left(\frac{t^2 - t^2 + 9}{(t^2+9)^{3/2}}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{-3t}{(t^2+9)^{3/2}}\right)\vec{\jmath}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{u}}{dt} = \left(\frac{9}{(t^2+9)^{3/2}}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{-3t}{(t^2+9)^{3/2}}\right)\vec{\jmath}$$