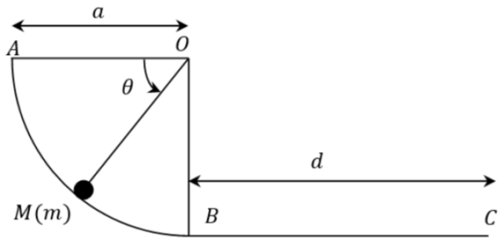
Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
1ère Année LMD-M et MI

Année Universitaire 2023/2024
Département de Mathématiques

TD n° 6 de Mécanique
Travail et Energie

EXERCICE 1

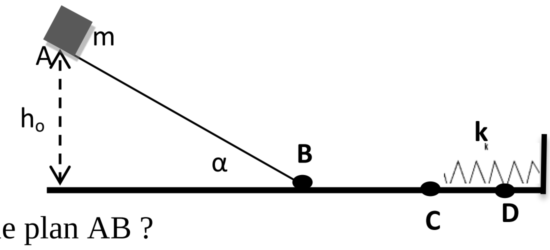
Une particule de masse m, initialement au repos en A, glisse sans frottement sur la surface circulaire AOB de rayon a.



Déterminer le travail du poids de A à M.
2) Déterminer le travail de la force de contacte surface-particule m.
3) Déterminer l'énergie potentielle E_p de m au point M ($E_p(B) = 0$).
4) Utiliser le théorème de l'énergie cinétique, pour déterminer la vitesse de m au point M,
en déduire son énergie cinétique E_c .
5) Calculer l'énergie mécanique E_m.
6) Représenter E_c , E_p et E_m $(0 < \theta < \pi 2)$. Discuter
7) La surface circulaire AOB est raccordée à une partie horizontale BC, il existe des frottements entre B et C, la particule s'arrête a une distance d de B. Déterminer le coefficient de frottement cinétique. On donne $d = 3a = 3m$.

EXERCICE 2

On considère un petit bloc de masse m =5kg abandonné sans vitesse initiale au point A d'un plan incliné faisant un angle $\alpha=30°$ par rapport à l'horizontale. Le point A est à une hauteur $h_0=5m$ par rapport à l'horizontale.

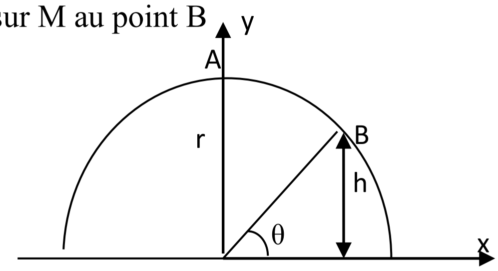


1- Sachant que le coefficient du frottement dynamique sur le plan AB est $\mu_d=0.2$, en appliquant le principe fondamental de la dynamique:
  - Quelle est la nature du mouvement sur le plan AB ?
  - Calculer la vitesse du bloc lorsqu'il atteint le point B.

2- Après le passage au point B à la vitesse V_B, la masse arrive au point C. Sachant que le coefficient de frottement est négligeable sur le plan BC :
  - Déduire la vitesse au point C?
  - Calculer la compression maximale du ressort sachant que sa constante de raideur égale à k=100N/m? (on donne $g = 10\ m/s^2$)

EXERCICE 3

Un morceau de glace M de masse m glisse sans frottement sur la surface externe d'un igloo qui est une demi sphère de rayon r dont la base est horizontale.
A t=0, il est lâché du point A sans vitesse initiale
1- Trouver l'expression de la vitesse au point B, en fonction de g, r et θ
2- En utilisant la relation fondamentale de la dynamique,
déterminer l'expression de $|\vec{N}|$ la réaction de l'igloo sur M au point B en fonction de la vitesse v_B.
3- A quelle hauteur, M quitte t-il la sphère ?
4- A quelle vitesse M arrive à l'axe (Ox)?



Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
1ère Année LMD-M et MI

Année Universitaire 2023/2024
Département de Mathématiques

CORRIGES DES EXERCICES

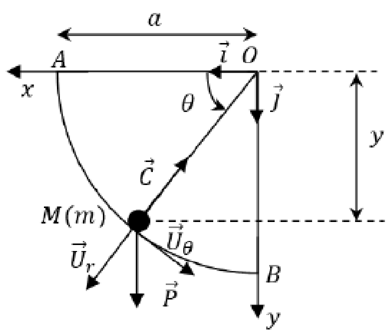
EXERCICE 1

1) Le travail de $\vec{p}$ de A à M est :

$$dW = \vec{p}.\overrightarrow{dl} \quad \text{with} \quad p = mg\,\vec{j}$$

$$\overrightarrow{dl} = dx\vec{\imath} + dy\vec{j} \quad \text{so} \quad dW = mgdy$$

$$W = mg\int_0^y dy = mgy = mg\ a\ sin\theta$$



2) Le travail de la force de contact R_N :

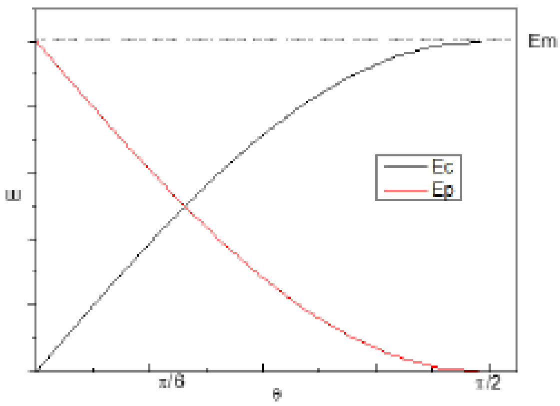
$$W_R = \int_0^y \overrightarrow{R_N}.\overrightarrow{dl} = \vec{0} \ \ car\ \overrightarrow{R_N} \perp \overrightarrow{dl}$$

3) L'énergie potentielle :

$dEp = -dW \Rightarrow Ep = -mg\ a.\sin\theta + c$

$E_p\,(B) = 0$, $\theta = \pi/2$ *donc* $c=mga$

$\Rightarrow$ **E_p=mga(1-sinθ)**



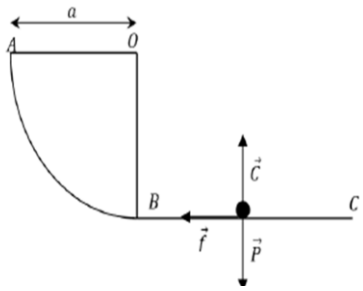
4) $\Delta E_C = \sum W \Rightarrow \frac{1}{2}mv_M^2 = mga\sin\theta$

$V_M = \sqrt{2ga\ sin\theta}$

5) $E_m = E_c + E_P = mg\ a$ =cste

6) Lorsque E_P diminue E_c augmente alors que E_m reste constante.

7) $\mu = \frac{f}{R_N} = \frac{f}{p} \Rightarrow f = \mu mg$



Alors $\Delta E_C = W_f = \int_B^C \vec{f}.\overrightarrow{dl} = -\mu mgd \ \Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 = -\mu mgd$

Donc $v_B = \sqrt{2ag}$

Remarque : Remplaçons $\theta = \pi/2$ dans la formule de v_M,

on trouve : $v_B = \sqrt{2ag}$, on peut aussi utilisé : $E_{m_B} = E_{m_A} \Rightarrow E_{C_A} + E_{P_A} = E_{C_B} + E_{P_B}$

calcul de μ : on a $\mu = \frac{f}{R_N} = \frac{f}{mg}$ car $R_N = mg$ (par projection sur (oy))

$$\sum \vec{F} = m\vec{\gamma} = \vec{f} + \vec{P} + \overrightarrow{R_N}$$

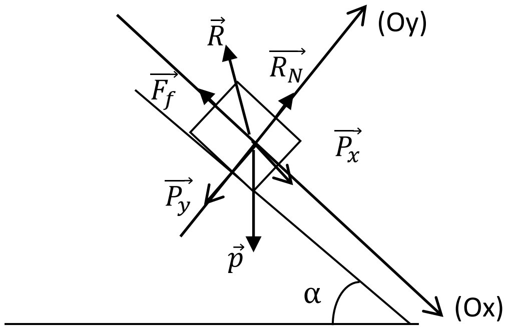
Projrction sur (ox) : -f=m.γ

On a aussi : $v_C^2 - v_B^2 = 2\gamma.d$ (v_C =0)

$-v_B^2 = 2\gamma.d = 2ag$ donc $\gamma = \frac{-ag}{d}$ avec -f=m.γ=$\frac{-mag}{d}$ et f $\frac{-mag}{d}$

Alors $\mu = \frac{f}{R} = \frac{f}{mg} = \frac{mag}{mg.d} = \frac{a}{d} = \frac{1}{3}$.

EXERCICE 2



1. Sachant que le coefficient du frottement dynamique

sur le plan AB est μ_d=0.2, en appliquant le principe fondamental de la dynamique:

- Quelle est la nature du mouvement sur AB ? on cherche **a= ?**

  $\Sigma\vec{F} = m\vec{a} = \vec{p} + \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{F_f}$

Suivant (Ox) $-F_f + p_x = -F_f + m\,g\sin\alpha = ma$

Suivant (Oy) $R_N - p_y = 0 \Rightarrow R_N = m\,g\cos\alpha$

$\mu_d = tg\varphi = F_f / R_N \Rightarrow F_f = R_N\, tg\,\varphi = \mu_d\, m\,g\cos\alpha$

$-\mu_d\, m\,g\cos\alpha + m\,g\sin\alpha = ma \Rightarrow a = g.(\sin\alpha - \mu_d\cos\alpha)$ donc **a = 3.26 m/s²**

- Calculer la vitesse du bloc lorsqu'il atteint le point B.

  $v_B^2 - v_A^2 = 2al \Rightarrow v_B^2 = 2al = 2a(\frac{h}{sin\alpha})$

  $v_B = \sqrt{2a(\frac{h}{sin\alpha})} = 8.074\ m/s$

2. $V_c = V_B$ car on a un MRU (principe d'inertie ou 1ere loi de Newton)

   On calcule la distance de compression du ressort :

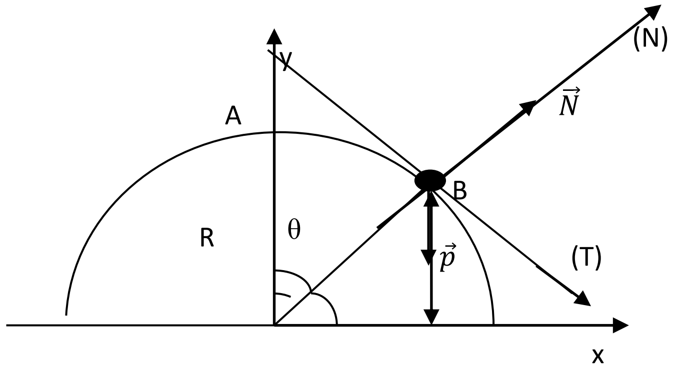
   $\Delta Ec = \Sigma W_{f_{ext}} \Rightarrow Ec_D - Ec_C = W_p + W_{Fr} + W_{RN}$

   $-\frac{1}{2}kx^2 = -\frac{1}{2}mv_c^2$ donc $x = \sqrt{\frac{mv_c^2}{k}} = 1.8\ m$

2eme Méthode : entre les deux points C et D

$E_{M_C} = E_{M_D} \Rightarrow E_{C_C} + E_{P_C} = E_{C_D} + E_{P_D} \Rightarrow \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_c^2$ donc $x = \sqrt{\frac{mv_c^2}{k}} = 1.8\ m$

EXERCICE 3



1-D'après le principe de la conservation de l'énergie mécanique entre les deux points A et B :

$$E_{M_A} = E_{M_B} \Rightarrow E_{C_A} + E_{P_A} = E_{C_B} + E_{P_B}$$

Alors $E_{C_A} = E_{C_B} + E_{P_B}$

Car : $E_{C_A} = 0\, puisque\ v_A = O\ \ car\ le\ point\ matériel\ est\ lancée\ sans\ vitesse\ initiale$

Avec :$h_B = Rcos\theta$

Donc (*)⇒ $mgR = \frac{1}{2}mv_B^2$+ mg Rcos θ

Alors $gR = \frac{1}{2}v_B^2$+ g Rcosθ (*')⇒ v_B^2= $2(gR - gRcos\theta)$

$$\Rightarrow v_B = \sqrt{2(gR - gRcos\theta)}$$

2-D'après le principe fondamental de la dynamique

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{N} + \vec{p} = m\vec{a}$$

On choisit un repère composés de l'axe (OT) tangent à la demi sphère et l'axe (ON) suivant le rayon et dans le sens de $\vec{N}$:

En faisant la projection sur l'axe (ON) :

N-p cosθ =ma_N⇒ $N - mg\cos\theta = -m\frac{v^2}{r}$

3-Quand le point P quitte la sphère alors la réaction du support N=0 :

$mg\cos\theta = m\frac{v_p^2}{R} \Rightarrow v_p^2 = Rg\cos\theta$

(*')⇒ $R = \frac{1}{2}R\, g\cos\theta$+ g Rcos θ alors $cos\theta = \frac{2}{3}$ Donc $\theta_0 = 48°$

Le point matériel P quitte la sphère à une hauteur h_p=$\frac{2}{3}$ R et la vitesse sera $v_p = \sqrt{\frac{2}{3}Rg}$

L'angle par rapport à l'horizontale pour lequel le point quitte la demi sphère est : 90-48=52

4-La vitesse du point matériel sur l'axe (ox) sera (Ө=0):

$v_p^2 = Rg\cos 0 \Rightarrow v_p = \sqrt{Rg}$