TD n° 5 de Mécanique
Dynamique du point matériel

Exercice 1

Un homme pousse une tondeuse à gazon de $20\ kg$ avec une force de 80N dirigée parallèlement à la poignée qui est inclinée de 30° par rapport à l'horizontale.

1. S'il se déplace à vitesse constante, quel est le module de la force de frottement due au sol ?

2. Quelle force parallèle à la poignée produirait une accélération de $1m/s$, sachant que la force de frottement étant celle trouvée dans la question 1?

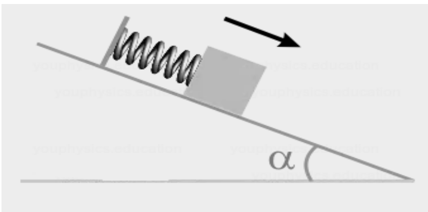
Exercice 2

Un bloc de masse m remonte le long d'un plan incliné d'un angle α, par rapport à l'horizontale, avec une vitesse initiale v_0, et un coefficient de frottement f_d.

1. Déterminer jusqu'à quelle distance le bloc se déplace avant de s'arrêter.
2. Quelle est la valeur maximale que peut prendre le coefficient de frottement statique f_s pour que le corps reste immobile.
3. Pour une valeur du coefficient de frottement dynamique f_d inférieure à la valeur maximale trouvée dans la deuxième question, quelle est la vitesse v_1 du corps lorsqu'il revient à sa position de départ.

Exercice 3

Une masse m = 15 kg suspendue à un ressort de raideur K = 100N / m descend le long d'un plan incliné qui fait un angle α = 30º avec l'horizontale. En supposant qu'il n'y a pas de frottement, déterminez la réaction normal du support ainsi l'accélération de la masse lorsque le ressort s'est étiré d'une longueur x = 0.02m.

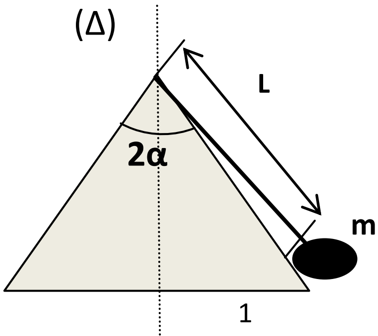


Exercice 4

Un corps de masse (m=1kg) est attaché par un fil de longueur L=30cm au sommet d'un cône, d'axe (Δ) et d'angle au sommet 2α=60°. Ce corps tourne sans frottement sur la surface du cône avec une vitesse de rotation ω=10 tr/mn.(**10.2π/60s**)

1- Calculer la vitesse linéaire du corps.

2- En utilisant le principe fondamentale de la dynamique, déterminer la réaction (R_N) de la surface du cône sur le corps et la tension du fil (T).

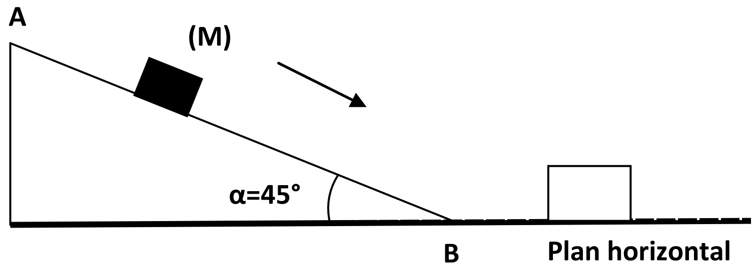


Exercice supplémentaire

On lance un bloc (M) de masse m, a partir du sommet d'un plan incliné AB=1m d'un angle $\alpha=45°$ par rapport à l'horizontale, avec une vitesse initiale $v_A=1m/s$.

1- Sachant que le coefficient de frottement $\mu=0.5$ sur AB.
  - Démontrer, quelle est la nature du mouvement sur AB ?
  - Calculer la vitesse de (M) lorsqu'il atteint le point B.

2- On considère que les forces de frottements sont négligeables sur le plan horizontal :
  - Démontrer, quelle est la nature du mouvement sur le plan horizontal ?
  - Le bloc (M) s'arrêtera t'il ? justifier votre réponse ?



CORRIGES DES EXERCICES

EXERCICE 1:

Le module de la force de frottement :

M=20kg, $\alpha = 30°$ et F=80N.

1- PFD : $\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{p} + \overrightarrow{R_N} + \vec{F} + \vec{f} = m\vec{a}$ avec v=cst donc a=0.

Suivant (Ox) : F **cosα- f**=0

Suivant (Oy): R_N -P =0⇒ R_N =m g

Alors f=80.cos.30=69.28N

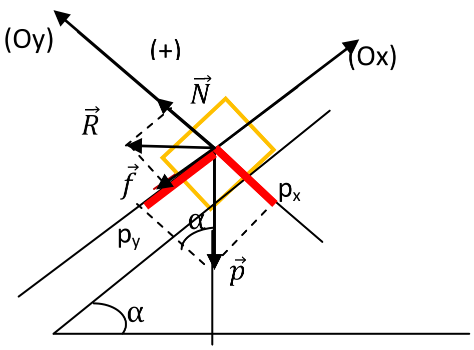
2- la force F pour que a=1m/s^2

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{p} + \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{F'} + \vec{f} = m\vec{a}$$

Suivant (Ox) : -f+ F' **cosα- f**=m.a

$$F' = \frac{m.a + f}{cos\alpha} = 103.1N$$

EXERCICE 2 :



A t=0 ,v=v_0 et μ=f_d

1-Cherchons la distance que peut parcourir le bloc avant de s'arrêter

D'après le principe fondamental de la dynamique

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{p} + \vec{R} = \vec{p} + \vec{N} + \vec{f} = m\vec{a}$$

La vitesse initiale v_i= v_0 et la vitesse finale v_f=0 (le corps va s'arrêter)

Nous avons $v_f^2 - v_i^2 = 2al$ (*l* étant la distance parcourue par le corps)

Donc $a = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2l}$

Il faut choisir le repère, tel que l'axe (Ox) est suivant l'axe du mouvement, Donc il est parallèle à $\vec{f}$ et (Oy) est perpendiculaire à (Ox) donc parallèle à $\vec{N}$.

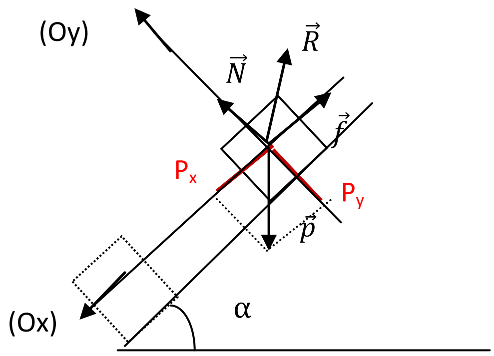
Suivant (Ox) : $-f - p_x = -f - m\,g\,\sin\alpha = ma$

Suivant (Oy): $N - p_y = 0 \Rightarrow N = m\,g\,\cos\alpha$

$f_d = tg\varphi = f/N \Rightarrow f = N\,tg\,\varphi = Nf_d$ donc $f = f_d\,m\,g\,\cos\alpha$

$-f_d\,m\,g\,\cos\alpha - m\,g\,\sin\alpha = ma \Rightarrow -f_d\,g\,\cos\alpha - g\,\sin\alpha = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2l}$

Donc $l = \frac{-v_i^2}{2(-f_d\,g\cos\alpha - g\sin\alpha)} = \frac{v_0^2}{2g(f_d\,\cos\alpha + \sin\alpha)}$



2- La valeur maximale que peut prendre le coefficient de frottement statique f_s pour le corps puisse redescendre,

-A l'équilibre

Suivant (Ox) : $-f + p_x = 0 \Rightarrow f = m\,g\,\sin\alpha$

Suivant (Oy): $N - p_y = 0 \Rightarrow N = m\,g\,\cos\alpha$

Pour que le corps puisse redescendre, il faut que $p_x > f$

$p_x \geq f \Rightarrow m\,g\,\sin\alpha \geq N\,f_s$ (*) ($f_s = f/N$)

avec $f = N\,f_s$ et f_s est le coefficient de frottement statique pour lequel le corps commence son mouvement (avec $f_s = f/N \Rightarrow f = N\,tg\,\varphi$ donc $f = f_s\,m\,g\,\cos\alpha$)

(*)$\Rightarrow m\,g\,\sin\alpha \geq m\,g\,\cos\alpha\,f_s$ donc $f_s \leq tg\,\alpha$

La valeur maximale que peut prendre f_s est $tg\,\alpha$.

3-La vitesse v_1 du corps lorsqu'il revient à sa position initiale.

x=l, v_i=0 et on cherche v_f

$v_f^2 - v_i^2 = 2al$ l est la distance parcourue par le corps.

Donc $a = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2l}$

Il faut choisir le repère, tel que l'axe (Ox) est suivant l'axe du mouvement, Donc il est parallèle et suivant p_x et l'axe (Oy) est perpendiculaire à (Ox) donc parallèle à $\vec{N}$.

Suivant (Ox) :   - f+ p_x= -f+m g sinα=ma

Suivant (Oy): N-p_y=0⇒N=m g cosα

f_d=tgφ=f/N ⇒f=N tg φ   donc f= f_d m g cosα

Alors - f_d m g cosα +m g sinα=ma ⇒ -f_d g cosα +g sinα=$\frac{v_f^2 - v_i^2}{2l}$

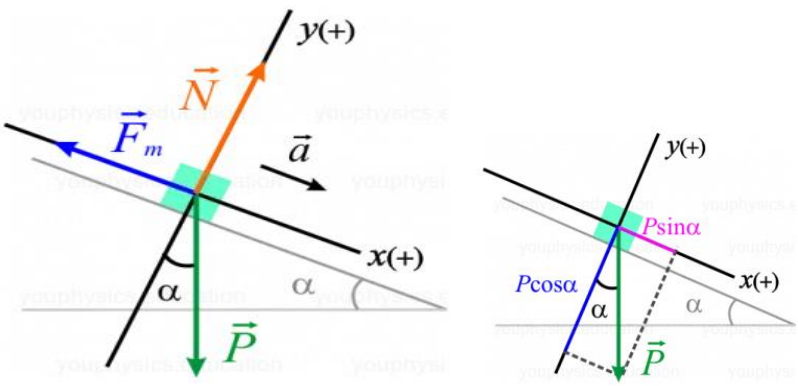
$v_f^2 = 2gl(sin$α- f_d cosα) (avec l est la meme distance trouvée dans la question 1).

EXERCICE 3

Pour résoudre ce problème nous allons utiliser la deuxième loi de Newton. Les forces qui agissent sur la masse sont le poids (si celle-ci est proche de la superficie de la Terre), la normale (car elle est appuyée sur le plan) et la force du ressort qui est donnée par la loi de Hooke.

Nous représentons ci-dessous un diagramme des forces qui agissent du la masse ainsi que les axes cartésiens qui nous utiliserons pour faire les projections.

La force de rappel du ressort agis dans le sens contraire à l'élongation du ressort (et par conséquent au sens de déplacement de la masse):



L'accélération de la masse est aussi représenté dans la figure. Elle va dans la direction du sens positif de l'axe *x*.

Dans le diagramme ci-dessous nous avons représenté les projections du vecteur poids sur les axes que nous avons choisi.
La deuxième loi de Newton appliqué au mouvement de la masse donne:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{p} + \vec{N} + \vec{F_r} = m\vec{a}$$

Et en faisant la projection sur les axes cartésiens nous obtenons:

Suivant (Ox) $- F_r + p_x = - F_r + m\,g\,\sin\alpha = ma$……..…..1

Suivant (Oy) $N - p_y = 0 \Rightarrow N = m\,g\,\cos\alpha$…………………2
Nous obtenons la norme de la réaction du support à partir de l'équation (2), comme vous pouvez le constater, **elle n'est pas égale au poids**.
$N = m\,g\,\cos\alpha$
D'autre part la norme de la force de rappel du ressort est donnée par:
$F_r = k.x$
Finalement, en résolvant l'équation (1) et on obtient l'accélération:
$a = (- F_r + m\,g\,\sin\alpha)/m = 4.8\ m/s^2$
En prenant $g = 10\ m/s^2$.

<u>EXERCICE 4 :</u>

1- la vitesse linéaire du corps.

L=30cm , 2α=60°.(α=30°) et ω=10 tr/mn.

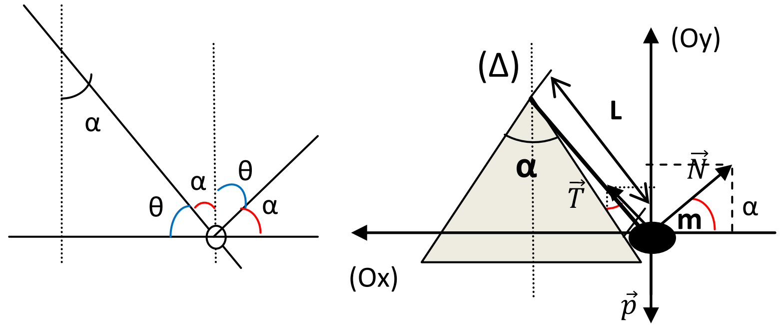
$$\begin{cases} 10x2\pi \longrightarrow 60\ s \\ \omega \longrightarrow 1s \end{cases} \Rightarrow \omega = \frac{10x2\pi}{60} = \frac{\pi}{3} rd/s$$

$v = \omega R$ et $R = l\sin\alpha$

Alors $v = \omega\, l \sin\alpha = \frac{\pi}{3} x0,3x\sin 30 = 0,157 m/s$

Déterminons la réaction (N) de la surface du cône sur le corps et la tension du fil (T).

D'après le principe fondamental de la dynamique



α+θ=90

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{p} + \vec{N} + \vec{T} = m\overrightarrow{a_N}$$

On choisit un repère tel que (Ox) est suivant l'accélération normale et dirigé vers le centre du cône et l'axe (Oy) est perpendiculaire à (N).

sur (Ox) : T_x- N_x =m a_N (*)

sur (Oy) : T_y+ N_y - p=m a_T=0 (car a_T=0, parce que la vitesse est constante)

$\Rightarrow T\cos\alpha + N\sin\alpha - p = 0$

(*)$\Rightarrow$T sin α – N cos α= $m\frac{v^2}{R}=m\frac{\omega^2R^2}{R}$

Donc $T = \frac{m\omega^2R}{\sin\alpha} + N\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

On le remplace dans la deuxième équation.

$$\left(\frac{m\omega^2R}{\sin\alpha} + N\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\cos\alpha + N\sin\alpha - p = 0$$

$$\left(\frac{m\omega^2R}{\sin\alpha}\cos\alpha + N\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\right) + N\sin\alpha - p = 0$$

$$N\left(\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + \sin\alpha\right) = p - \frac{m\omega^2R}{\sin\alpha}\cos\alpha \Rightarrow N\left(\frac{1}{\sin\alpha}\right) = \frac{mg\sin\alpha - m\omega^2R\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Donc N=m$(g\sin\alpha - \omega^2R\cos\alpha)$, En remplaçant R par l sinα , on aura :

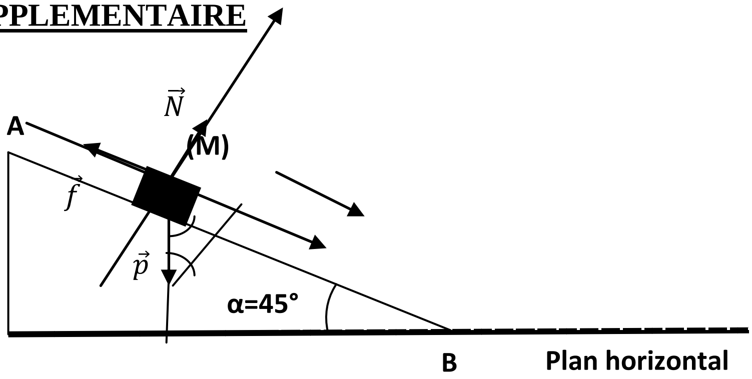
N=m$(g\sin\alpha - \omega^2 l\sin\alpha\cos\alpha) = 7{,}92$ N

Alors $T = \frac{m\omega^2 l\sin\alpha}{\sin\alpha} + N\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 5{,}88$ N

(si on remplace N par son expression, on trouve T=m g cos α +m$\omega^2 l\,(1 - \cos^2\alpha)$

alors T= m g cos α +m$\omega^2 l\sin^2\alpha$)

EXERCICE SUPPLEMENTAIRE



v_A=1m/s et μ=0,5 sur AB

La nature du mouvement sur AB ?

$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{p} + \vec{N} + \vec{f} = m\vec{a}$

On choisit le repère, tel que l'axe (Ox) est suivant l'axe du mouvement parallèle à $\vec{f}$ et (Oy) est perpendiculaire à (Ox) donc suivant $\vec{N}$.

Suivant (Ox) : $-f + p_x = -f + m\,g\,\sin\alpha = ma$

Suivant (Oy): $N - p_y = 0 \Rightarrow N = m\,g\cos\alpha$

$\mu = tg\varphi = f/N \Rightarrow f = N\,tg\,\varphi$ donc $f = \mu\,m\,g\cos\alpha$

Alors $-\mu\,m\,g\cos\alpha + m\,g\sin\alpha = ma \Rightarrow a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$

$a = 10\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0{,}5\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3{,}54\,m/s^2$

L'accélération a est constante et positive donc le mouvement est uniformément accéléré.

La vitesse du point M lorsqu'il atteint le point B ?

$v_B^2 - v_A^2 = 2al \Rightarrow v_B^2 = v_i^2 + 2al$

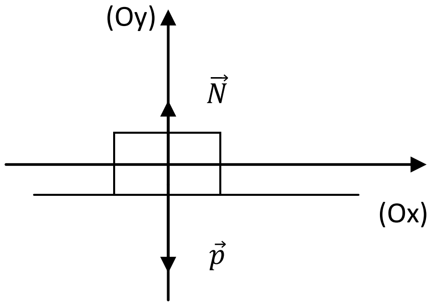
Avec l=AB=1

$$v_B = \sqrt{1 + 2a} = 2{,}84\,m/s$$

La nature du mouvement sur le plan horizontale.

Les forces de frottement sont négligeables :

$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{p} + \vec{N} = m\vec{a}$



Sur Ox: 0=ma'

Sur Oy : N-p=0 $\Rightarrow N = p = mg$

Donc a'=0 alors le mouvement est rectiligne uniforme.

-le mouvement est uniforme alors la vitesse est constante $v=v_B$ le bloc ne s'arretera pas.