Série de TD N° 04
Mouvement relatif

EXERCICE 1

Dans le plan Oxy, on considère un système d'axes mobiles (OXY) de même origine O et tel que Ox fasse avec OX un angle variable θ. Un point M mobile sur l'axe OX est repéré par OM=r. On appelle mouvement relatif de M son mouvement par rapport à (OXY), et le mouvement absolu par rapport à (Oxy).

Calculer dans le repère mobile (coordonnées polaires)

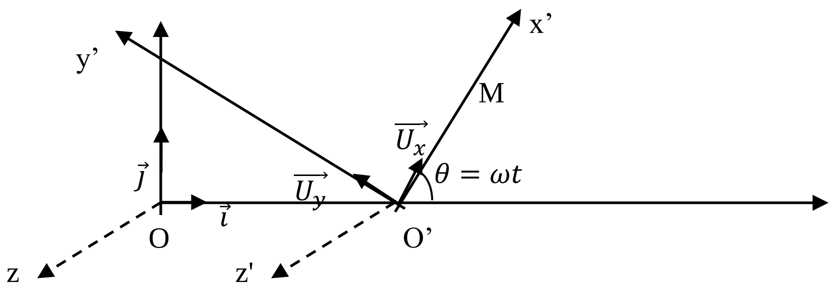
1- La vitesse et l'accélération relative de M
2- La vitesse et l'accélération d'entrainement de M
3- Accélération de Coriolis.
4- En déduire sa vitesse et son accélération absolue.

EXERCICE 2

Soit le repère R(Oxyz) où le point O' se déplace sur l'axe (Ox) avec une vitesse constante v. On lie à O' le repère (O'x'y'z') qui tourne autour de (Oz) avec une vitesse angulaire ω constante. Un point mobile M se déplace sur l'axe O'x' tel que $|O'M| = t^2$.

A l'instant t=0, les axes (Ox) et (O'x') sont confondus et M est en O.

1- Calculer la vitesse $\vec{v_r}$ et la vitesse d'entrainement $\vec{v_e}$, en déduire la vitesse absolue$\vec{v_a}$.
2- Calculer l'accélération relative $\vec{a_r}$, l'accélération d'entrainement $\vec{a_e}$ et l'accélération de Coriolis $\vec{a_c}$, en déduire l'accélération absolue $\vec{a_a}$.



EXERCICE 3

Soit le repère R(Oxyz) où le point O' se déplace sur l'axe (Oy) avec une accélération constante γ. On lie à O' le repère (O'XYZ) qui tourne autour de (Oz) avec une vitesse angulaire ω constante. Les coordonnées d'un mobile M dans le repère mobile sont $x'=t^2$ et $y'=t$.

A l'instant t=0, l'axe (O'X) est confondu avec (Ox).

Calculer dans le repère mobile :

1-La vitesse $\vec{v_r}$ et la vitesse d'entrainement$\vec{v_e}$, en déduire la vitesse absolue$\vec{v_a}$.

2-L'accélération relative $\overrightarrow{a_r}$, l'accélération d'entrainement $\overrightarrow{a_e}$ et l'accélération de Coriolis $\overrightarrow{a_c}$, en déduire l'accélération absolue $\overrightarrow{a_a}$.

EXERCICE 4

Dans le plan (Oxy) d'un repère (Oxyz), un point O' auquel on lie le repère (O'XYZ), décrit un cercle de centre O et de rayon r, il tourne avec une vitesse angulaire ω constante. Un point M se déplace sur l'axe (O'Y) parallèle à Oy avec une accélération γ constante. (à l'instant t=0, M est confondu avec $M_0(r,0,0)$ et sa vitesse initiale est positive).

1- Calculer dans le repère (Oxyz) le vecteur position $\overrightarrow{OM}$, la vitesse absolue $\overrightarrow{v_a}$ et l'accélération absolue $\overrightarrow{a_a}$
2- Sachant que O'X//Ox, O'Y//Oy et O'Z//Oz, calculer
   a- La vitesse relative et la vitesse d'entrainement, vérifier que $\overrightarrow{v_a}=\overrightarrow{v_r}+\overrightarrow{v_e}+\overrightarrow{v_c}$.
   b- L'accélération relative $\overrightarrow{a_r}$, l'accélération d'entrainement $\overrightarrow{a_e}$ et l'accélération de Coriolis $\overrightarrow{a_c}$, vérifier que $\overrightarrow{a_a}=\overrightarrow{a_r}+\overrightarrow{a_e}+\overrightarrow{a_c}$.

EXERCICE SUPPLEMENTAIRE

Soit un repère fixe (Oxyz) et un repère mobile (OX'Y'Z') qui tourne autour de (Oz) avec une vitesse angulaire ω constante.

Un point mobile M (OM=r) se déplace sur l'axe (OX') suivant la loi $r = r_0\,(\cos \omega t + \sin \omega t)$ avec r_0= constante.

Déterminer dans le repère mobile (OX'Y'Z') :

1- La vitesse $\overrightarrow{v_r}$ et la vitesse d'entrainement $\overrightarrow{v_e}$, en déduire la vitesse absolue $\overrightarrow{v_a}$.
2- L'accélération relative $\overrightarrow{a_r}$, l'accélération d'entrainement $\overrightarrow{a_e}$ et l'accélération de Coriolis $\overrightarrow{a_c}$, en déduire l'accélération absolue $\overrightarrow{a_a}$.

Corrigé de la série de TD 4

EXERCICE 1

$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{U_x}$ dans le repère (oXY) mobile (coordonnées polaires)

La vitesse relative : $\overrightarrow{v_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}/(OXY) = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{U_x}\overrightarrow{v_r} = r^{\cdot}\overrightarrow{U_x}$

L'accélération relative : $\overrightarrow{a_r} = \frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt}/(OXY)$ avec $\overrightarrow{v_r} = r^{\cdot}\,\overrightarrow{U_x}$ Donc

$$\overrightarrow{a_r} = \frac{d^2r}{dt^2}\overrightarrow{U_x} = r^{\cdot\cdot}\,\overrightarrow{U_x}$$

La vitesse d'entrainement : $\overrightarrow{OO'} = \vec{0}$ car les deux repères ont le même origine

$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}$ **avec** $\overrightarrow{OO'} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{v_e} = \vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}$

$$\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{U_x} & \overrightarrow{U_y} & \overrightarrow{U_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} = \omega r\,\overrightarrow{U_y} \text{Donc } \overrightarrow{v_e} = \omega\, r\,\overrightarrow{U_y}$$

L'accélération d'entrainement $\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \vec{\omega}\Lambda\left(\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\Lambda\overrightarrow{O'M}$

$\frac{d\vec{\omega}}{dt}\Lambda\overrightarrow{O'M} = \vec{0}$ car ω constante et $\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = \vec{0}$

$$\vec{\omega}\Lambda\left(\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}\right) = \vec{\omega}\Lambda\left(\omega\, r\,\overrightarrow{U_y}\right) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{U_x} & \overrightarrow{U_y} & \overrightarrow{U_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & \omega\, r & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2\, r\,\overrightarrow{U_x}$$

Donc $\overrightarrow{a_e} = -\omega^2 r\overrightarrow{U_x}$

L'accélération de Coriolis $\overrightarrow{a_c} = 2\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{v_r} = 2\begin{vmatrix} \overrightarrow{U_x} & \overrightarrow{U_y} & \overrightarrow{U_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ r^{\cdot} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\omega r^{\cdot}\overrightarrow{U_y}$

Donc $\overrightarrow{a_c} = 2\omega r^{\cdot}\overrightarrow{U_y}$

La vitesse absolue $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e} = r^{\cdot}\overrightarrow{U_x} + \omega\, r\,\overrightarrow{U_y}$

L'accélération absolue : $\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_c} + \overrightarrow{a_e} = (r^{\cdot\cdot} - \omega^2 r)\overrightarrow{U_x} + 2\omega r^{\cdot}\overrightarrow{U_y}$

EXERCICE 2

La vitesse relative $\overrightarrow{v_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}/(R')$ avec $\overrightarrow{O'M} = t^2\overrightarrow{U_x}$ Donc $\overrightarrow{v_r} = 2t\overrightarrow{U_x}$

La vitesse d'entrainement : $\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}$

On cherche d'abord le vecteur $\overrightarrow{OO'}$

Le point O' se déplace sur l'axe (Ox) avec une vitesse v, alors $\overrightarrow{v_{O'}} = \frac{dOO'}{dt}\vec{\imath} = v\vec{\imath}$

A t=0, x=0 donc $\frac{dOO'}{dt} = v \Rightarrow OO' = vt \;\; donc \;\; \overrightarrow{OO'} = vt\vec{\imath}$

$$\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{U_x} & \overrightarrow{U_y} & \overrightarrow{U_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ t^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \omega t^2\overrightarrow{U_y} \quad et \; \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = v\vec{\imath}$$

Donc $\overrightarrow{v_e} = \omega t^2\overrightarrow{U_y} + v\vec{\imath}$

Il faut écrire $\overrightarrow{v_e}$ dans un meme système de coordonnées, pour cela on va écrire $\vec{\imath}$ en fonction de $\overrightarrow{U_x}$ et $\overrightarrow{U_y}$

Nous avons : $\begin{cases} \overrightarrow{U_x} = cos\,\theta\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{U_y} = -\sin\theta\vec{\imath} + cos\;\theta\,\vec{\jmath} \end{cases} \Rightarrow \vec{\imath} = cos\,\theta\overrightarrow{U_x} - \sin\theta\,\overrightarrow{U_y}$

Donc $\overrightarrow{v_e} = \omega t^2\overrightarrow{U_y} + v(cos\,\theta\overrightarrow{U_x} - \sin\theta\,\overrightarrow{U_y}) = v\,cos\,\theta\overrightarrow{U_x} + (\omega t^2 - v\,sin\,\theta)\overrightarrow{U_y}$

La vitesse absolue

$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e} = 2t\overrightarrow{U_x} + \omega t^2\overrightarrow{U_y} + v(cos\,\theta\overrightarrow{U_x} - \sin\theta\,\overrightarrow{U_y})$

$$\Rightarrow \overrightarrow{v_a} = (2t + v\,cos\,\theta)\overrightarrow{U_x} + (\omega t^2 - v\,sin\,\theta)\overrightarrow{U_y}$$

L'accélération relative $\overrightarrow{a_r} = \frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt}/(R')$ avec $\overrightarrow{v_r} = 2t\overrightarrow{U_x}$ Donc $\overrightarrow{a_r} = 2\overrightarrow{U_x}$

L'accélération d'entrainement $\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \vec{\omega}\Lambda(\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\Lambda\overrightarrow{O'M}$

$$\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = \vec{0}\,, \frac{d\vec{\omega}}{dt}\Lambda\overrightarrow{O'M} = \vec{0} \text{ car } \omega \text{ constante}$$

Et $\vec{\omega}\Lambda(\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}) = \vec{\omega}\Lambda\omega t^2\overrightarrow{U_y} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{U_x} & \overrightarrow{U_y} & \overrightarrow{U_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & \omega t^2 & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2 t^2\overrightarrow{U_x}$

Donc $\overrightarrow{a_e} = -\omega^2 t^2\overrightarrow{U_x}$

L'accélération de Coriolis

$$\vec{a_c} = 2\vec{\omega}\Lambda\vec{v_r} = 2\begin{vmatrix} \vec{U_x} & \vec{U_y} & \vec{U_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ 2t & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4t\omega\,\vec{U_y}$$

L'accélération absolue

$$\vec{a_a} = \vec{a_r} + \vec{a_c} + \vec{a_e} = 2\vec{U_x} - \omega^2 t^2 \vec{U_x} + 4t\omega\,\vec{U_y}$$

Alors $\vec{a_a}$=$(2-\omega^2t^2)\vec{U_x} + 4t\,\omega\vec{U_y}$

<u>EXERCICE 3</u>

Les coordonnées du point M dans le repère mobile M(t^2, t)/(R') Donc $\overrightarrow{O'M}$ s'écrit :

$\overrightarrow{O'M} = t^2\vec{U_x} + t\vec{U_y}$

O' se déplace sur l'axe(Oy) avec une accélération constante γ , avec, à l'instant t=0, l'axe (O'X) est confondu avec (Ox). Donc v_0=0 et y_0=0 donc

$l'accélération\ de\ O'est: \gamma = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = \gamma dt$ Après intégration ***v=γ.t***

et $\frac{dy}{dt} = \gamma t \Rightarrow dy = \gamma t dt \quad donc\ y = \frac{1}{2}\gamma t^2$ et $\overrightarrow{OO'} = \frac{1}{2}\gamma t^2 \vec{j}$

La vitesse relative $\vec{v_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}/(R')$ avec$\overrightarrow{O'M} = t^2\vec{U_x} + t\vec{U_y}$ Donc $\vec{v_r} = 2t\vec{U_x} + \vec{U_y}$

La vitesse d'entrainement : $\vec{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}$ avec $\overrightarrow{OO'} = \frac{1}{2}\gamma t^2\vec{j} \Rightarrow \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = \gamma t\vec{j}$

$$\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \vec{U_x} & \vec{U_y} & \vec{U_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ t^2 & t & 0 \end{vmatrix} = -\omega t\vec{U_x} + \omega t^2\vec{U_y} \quad Donc\ \vec{v_e} = \gamma t\vec{j} - \omega t\vec{U_x} + \omega t^2\vec{U_y}$$

Il faut écrire $\vec{v_e}$ dans un meme système de coordonnées, pour cela on va écrire $\vec{j}$ en fonction de $\vec{U_x}$et$\vec{U_y}$

Nous avons : $\begin{cases} \vec{U_x} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \\ \vec{U_y} = -\sin\theta\vec{i} + \cos\,\theta\,\vec{j} \end{cases} \Rightarrow \vec{j} = \sin\theta\vec{U_x} + \cos\theta\,\vec{U_y}$

Donc$\vec{v_e} = \omega t^2\vec{U_y} - \omega t\vec{U_x} + \gamma t(\sin\theta\vec{U_x} + \cos\theta\,\vec{U_y})$

$$\Rightarrow \overrightarrow{v_e} = (\gamma t \sin\theta - \omega t)\overrightarrow{U_x} + (\omega t^2 + \gamma t \cos\theta)\overrightarrow{U_y}$$

La vitesse absolue $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e} = 2t\overrightarrow{U_x} + \overrightarrow{U_y} + (\gamma t \sin\theta - \omega t)\overrightarrow{U_x} + (\omega t^2 + \gamma t \cos\theta)\overrightarrow{U_y}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{v_a} = (\gamma t \sin\theta - \omega t + 2t)\overrightarrow{U_x} + (\omega t^2 + \gamma t \cos\theta + 1)\overrightarrow{U_y}$$

L'accélération relative $\overrightarrow{a_r} = \frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt}/(R')$ avec $\overrightarrow{v_r} = 2t\overrightarrow{U_x} + \overrightarrow{U_y}$ Donc $\overrightarrow{a_r} = 2\overrightarrow{U_x}$

L'accélération d'entrainement $\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \vec{\omega}\Lambda(\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\Lambda\overrightarrow{O'M}$

$\frac{d\vec{\omega}}{dt}\Lambda\overrightarrow{O'M} = \vec{0}$ car ω constante et $\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = \gamma\vec{j}$

et $\vec{\omega}\Lambda(\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}) = \vec{\omega}\Lambda(-\omega t\overrightarrow{U_x} + \omega t^2\overrightarrow{U_y}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{U_x} & \overrightarrow{U_y} & \overrightarrow{U_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega t & \omega t^2 & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2 t^2\overrightarrow{U_x} - \omega^2 t\overrightarrow{U_y}$

Donc $\overrightarrow{a_e} = \vec{j} - \omega^2 t^2\overrightarrow{U_x} - \omega^2 t\overrightarrow{U_y} = \gamma(\sin\theta\overrightarrow{U_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{U_y}) - \omega^2 t^2\overrightarrow{U_x} - \omega^2 t\overrightarrow{U_y}$

$$\overrightarrow{a_e} = (\gamma\sin\theta - \omega^2 t^2)\overrightarrow{U_x} + (\gamma\cos\theta - \omega^2 t)\overrightarrow{U_y}$$

L'accélération de Coriolis $\overrightarrow{a_c} = 2\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{v_r} = 2\begin{vmatrix} \overrightarrow{U_x} & \overrightarrow{U_y} & \overrightarrow{U_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ 2t & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4t\omega\overrightarrow{U_y} - 2\omega\overrightarrow{U_x}$

L'accélération absolue $\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_c} + \overrightarrow{a_e}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{a_a} = 2\overrightarrow{U_x} + (\gamma\sin\theta - \omega^2 t^2)\overrightarrow{U_x} + (\gamma\cos\theta - \omega^2 t)\overrightarrow{U_y} + 4t\,\omega\overrightarrow{U_y} - 2\omega\overrightarrow{U_x}$$

Alors $\overrightarrow{a_a} = (2 - 2\omega + \gamma\sin\theta - \omega^2 t^2)\overrightarrow{U_x} + (\gamma\cos\theta - \omega^2 t + 4t\omega)\overrightarrow{U_y}$

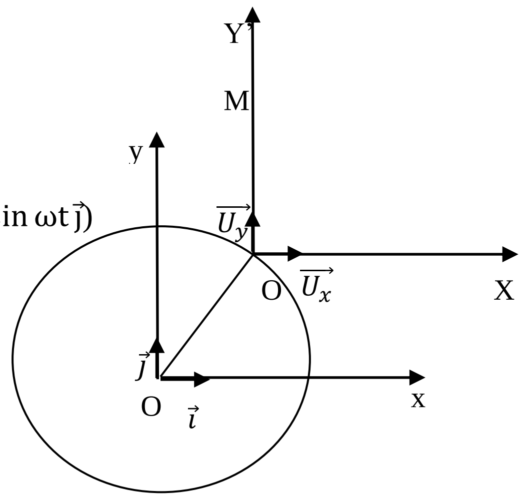
EXERCICE 4

A t=0, y'=0 et v=v_0

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ $\quad$ *avec* $\overrightarrow{OO'} = $ r(cos ωt $\vec{\imath}$ + sin ωt $\vec{\jmath}$)

M se déplace sur l'axe (O'Y) parallèle à Oy

avec une accélération γ constante



$\overrightarrow{OM} = y\overrightarrow{U_y}, \quad \gamma = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = \gamma dt$

Après intégration $v = \gamma t + v_0$

$\frac{dy}{dt} = \gamma t + v_0 \Rightarrow dy = \gamma t dt + v_0 dt \quad donc\ y = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t$

$\overrightarrow{O'M} = \left(\frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t\right)\overrightarrow{U_y}$

Puisque O'Y//Oy donc $\overrightarrow{U_y} = \vec{j}$ donc $\overrightarrow{O'M} = \left(\frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t\right)\overrightarrow{U_y} = \left(\frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t\right)\vec{j}$

Alors $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \mathrm{r}(\cos\ \omega t\,\vec{\imath} + \sin\omega t\,\vec{\jmath}) + \left(\frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t\right)\vec{j}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = \mathrm{r}\cos\ \omega t\,\vec{\imath} + \left(r\sin\omega t + \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t\right)\vec{j}$

La vitesse absolue $\overrightarrow{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/(R) = -\mathrm{r}\,\omega\sin\ \omega t\,\vec{\imath} + (r\omega\cos\omega t + \gamma t + v_0)\vec{j}$

L'accélération absolue $\overrightarrow{a_a} = \frac{d\overrightarrow{v_a}}{dt}/(R) = -\mathrm{r}\,\omega^2\cos\ \omega t\,\vec{\imath} + (-r\omega^2\sin\omega t + \gamma)\vec{j}$

La vitesse relative $\overrightarrow{v_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}/(R') = (\gamma t + v_0)\vec{j}$

La vitesse d'entrainement : $\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}$

$\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M} = \vec{0}$car les vecteurs unitaires des deux repères sont parallèles, donc il n'ya pas un mouvement de rotation.

Il y a un mouvement de translation $\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = -\mathrm{r}\,\omega\sin\ \omega t\,\vec{\imath} + r\omega\cos\omega t\,\vec{j}$

Vérifions que $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e}$

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e} = (\gamma t + v_0)\vec{j} - \mathrm{r}\,\omega\sin\ \omega t\,\vec{\imath} + r\omega\cos\omega t\,\vec{j}$$
$$= -\mathrm{r}\,\omega\sin\ \omega t\,\vec{\imath} + (r\omega\cos\omega t + \gamma t + v_0)\vec{j}$$

Donc $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e}$ est vérifiée

L'accélération relative $\vec{a_r} = \frac{d\vec{v_r}}{dt}/(R')$ avec $\vec{v_r} = (\gamma t + v_0)\vec{j}$ Donc $\vec{a_r} = \gamma\vec{j}$

L'accélération d'entrainement $\vec{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \vec{\omega}\Lambda\left(\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\Lambda\overrightarrow{O'M}$

$\frac{d\vec{\omega}}{dt}\Lambda\overrightarrow{O'M} = \vec{0}$ *et* $\vec{\omega}\Lambda\left(\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}\right) = \vec{0}$

Car il y a un mouvement de translation entre les repères

$\vec{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = -\mathrm{r}\,\omega^2\cos\,\omega t\,\vec{\imath} + -r\omega^2\sin\omega t\,\vec{\jmath}$ Donc $\vec{a_e} = -\omega^2 r_0(\cos\,\omega t\vec{\imath} + \sin\omega t\,\vec{\jmath})$

L'accélération de Coriolis $\vec{a_c} = 2\vec{\omega}\Lambda\vec{v_r} = \vec{0}$

Vérifions que $\vec{a_a} = \vec{a_r} + \vec{a_c} + \vec{a_e}$

$$\vec{a_r} + \vec{a_c} + \vec{a_e} = \gamma\vec{\jmath} + -\mathrm{r}\,\omega^2\cos\,\omega t\,\vec{\imath} \pm r\omega^2\sin\omega t\,\vec{\jmath}$$

$= -\mathrm{r}\,\omega^2\cos\,\omega t\,\vec{\imath} + (-r\omega^2\sin\omega t + \gamma)\vec{\jmath}$ Donc $\vec{a_a} = \vec{a_r} + \vec{a_c} + \vec{a_e}$ est vérifiée

EXERCICE SUPPLEMENTAIRE

$$r = r_0(\cos\,\omega t + \sin\omega t)\,\overrightarrow{U_x}$$

La vitesse relative $\vec{v_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}/(R')$

O' est confondu avec O alors : $\overrightarrow{OO'} = \vec{0}$ *et* $\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'M} \Rightarrow \vec{v_r} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/(R')$

$$\vec{v_r} = r_0\omega(-sin\omega t + \cos\omega t)\,\overrightarrow{U_x}$$

La vitesse d'entrainement : $\vec{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}$ avec $\overrightarrow{OO'} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = \vec{0}$

$\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{U_x} & \overrightarrow{U_y} & \overrightarrow{U_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} = \omega\, r\, \overrightarrow{U_y}$ *Donc* $\vec{v_e} = \omega\, r\,\overrightarrow{U_y} = \omega\, r_0(\cos\,\omega t + \sin\omega t)\,\overrightarrow{U_y}$

La vitesse absolue $\vec{v_a} = \vec{v_r} + \vec{v_e} = r_0\omega[(-sin\omega t + \cos\omega t)\overrightarrow{U_x} + (\cos\,\omega t + \sin\omega t)\overrightarrow{U_y}]$

$\Rightarrow \lceil\vec{v_a}\rceil = r_0\omega\sqrt{(-sin\omega t + \cos\omega t)^2 + (\cos\,\omega t + \sin\omega t)^2}$

Alors $\lceil\vec{v_a}\rceil = r_0\omega\sqrt{2}$ donc $\lceil\vec{v_a}\rceil$est constante

L'accélération relative $\overrightarrow{a_r} = \frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt}/(R')$ avec $\overrightarrow{v_r} = r_0\omega(-sin\omega t + \cos\omega t)\overrightarrow{\mathrm{U_x}}$

Donc $\overrightarrow{a_r} = r_0\omega^2(-\cos\omega t - sin\omega t)\overrightarrow{\mathrm{U_x}}$

L'accélération d'entrainement $\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \vec{\omega}\Lambda\left(\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\Lambda\overrightarrow{O'M}$ avec $\frac{d\vec{\omega}}{dt}\Lambda\overrightarrow{O'M} = \vec{0}$ car ω constante et $\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = \vec{0}$

et $\vec{\omega}\Lambda\left(\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}\right) = \vec{\omega}\Lambda\left(\omega\, r\,\overrightarrow{U_y}\right) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{U_x} & \overrightarrow{U_y} & \overrightarrow{U_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & \omega\, r & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2\, r\overrightarrow{U_x}$

Donc $\overrightarrow{a_e} = -\omega^2 r_0(\cos\ \omega t + \sin\omega t)\overrightarrow{U_x}$

L'accélération de Coriolis $\overrightarrow{a_c} = 2\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{v_r} = 2\begin{vmatrix} \overrightarrow{U_x} & \overrightarrow{U_y} & \overrightarrow{U_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ v_r & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\omega v_r\overrightarrow{U_y}$

Donc $\overrightarrow{a_c} = 2\omega v_r\overrightarrow{U_y} = 2r_0\omega^2(-sin\omega t + \cos\omega t)\overrightarrow{U_y}$

L'accélération absolue $\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_c} + \overrightarrow{a_e}$

$\overrightarrow{a_a} = -r_0\omega^2(\cos\omega t + sin\omega t)\overrightarrow{\mathrm{U_x}} - \omega^2 r_0(\cos\ \omega t + \sin\omega t)\overrightarrow{U_x} + 2r_0\omega^2(-sin\omega t + \cos\omega t)\overrightarrow{U_y}$

$\Rightarrow \overrightarrow{a_a} = -2r_0\omega^2(\cos\ \omega t + \sin\omega t)\overrightarrow{U_x} + 2r_0\omega^2(-sin\omega t + \cos\omega t)\overrightarrow{U_y}$

$\left|\overrightarrow{a_a}\right| = 2r_0\omega^2\ \sqrt{(-(\cos\ \omega t + \sin\omega t))^2 + (-sin\omega t + \cos\omega t)^2}$

Alors $\left|\overrightarrow{a_a}\right| = 2\ r_0\omega^2\sqrt{2}$ donc $\left|\overrightarrow{a_a}\right|$ est constante.