Université De Tlemcen
Faculté Des Sciences

Année Universitaire 2023/2024
Département De Mathématiques

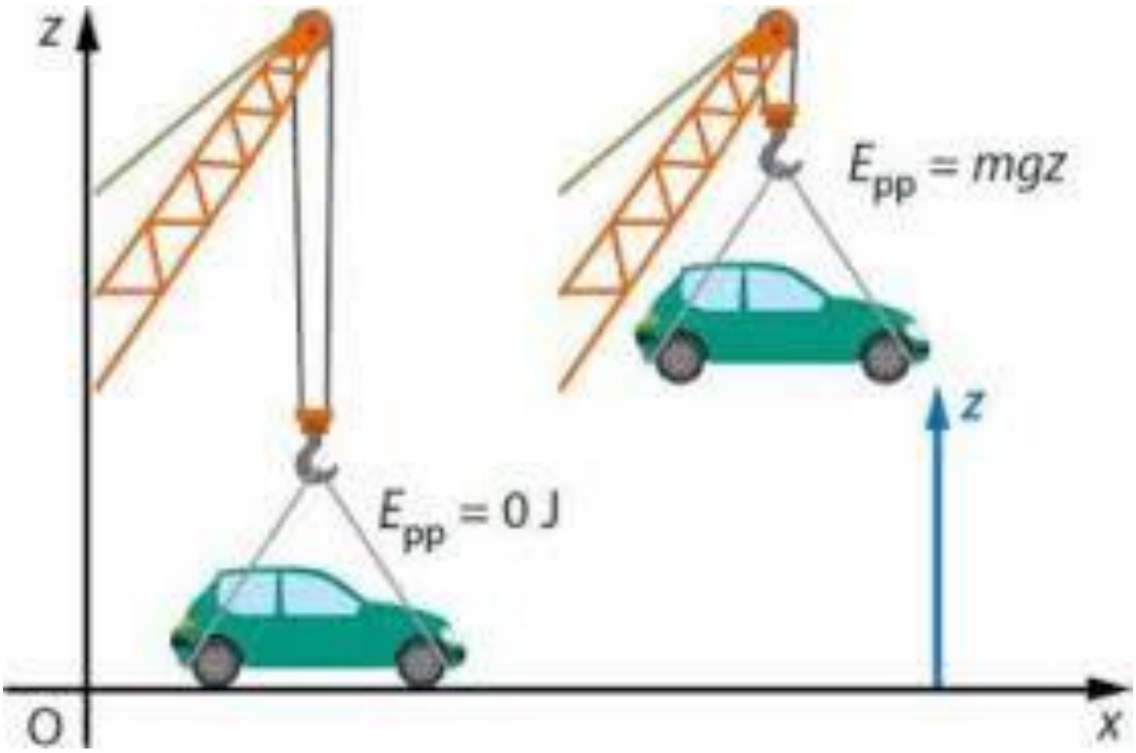
1ERE ANNEE LMD- M ET MI

COURS DE MECANIQUE

DU POINT MATERIEL

Chapitre VI : Travail et Energie

Préparé par : Mme Hadjou Belaid Zakia et Mme Bachir Nadia



Sommaire

Introduction

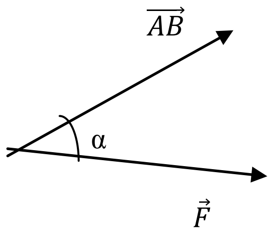
L'objectif de ce chapitre est de présenter les outils énergétiques utilisés en mécanique pour résoudre des problèmes. En effet, parfois le principe fondamental de la dynamique ne suffit pas pour parvenir au bout de la résolution des problèmes. Les lois de Newton permettent de résoudre tous les problèmes de la mécanique classique. Si on connaît la position et la vitesse initiale des particules d'un système ainsi que toutes les forces agissant sur elles. Mais dans la pratique, on ne connaît pas toujours toutes les forces qui entrent en jeu et même si c'est le cas, les équations à résoudre sont trop complexes. Dans ce cas il faut faire appel à d'autres notions telles que le travail et l'énergie. Avant de décrire les différents types d'énergies (énergies cinétique, potentielle et mécanique) et les utiliser dans des théorèmes énergétiques, nous présenterons les notions de puissance et de travail d'une force.

I. Le travail

Tout mouvement sous l'action des forces extérieurs $\vec{F}$, implique un travail de ces forces. Autrement dit ; un travail fourni par une force déplace un corps dans sa propre direction et crée un mouvement.

I.1. Le travail effectué par une force constante

Soit une particule soumis à une force constante $\vec{\mathbf{F}}$ qui déplace ce corps à une distance d=AB, le travail mécanique W effectué par la force $\vec{\mathbf{F}}$ est défini comme :



$$\boldsymbol{W_{AB}} = \vec{\mathbf{F}}.\overrightarrow{\mathbf{AB}} = |\vec{\boldsymbol{F}}|.|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}|.\boldsymbol{cos\alpha}$$

α est l'angle entre les deux vecteurs $\vec{F}\ et\ \overrightarrow{AB}$.

- Pour α=0 $\quad W = |\vec{F}|.|\overrightarrow{AB}| \quad$ car $cos0 = 1$
- Pour $\alpha < \frac{\pi}{2}$ on a $W > 0$ C'est un travail moteur.
- Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ on a $W = 0$ Car $cos\frac{\pi}{2} = 0$
- Pour $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \quad W < 0$ C'est un travail résistant.

L'unité du travail dans le système MKSA est le « **Joule** ».

Remarque :

On remarquera que le travail est une quantité scalaire, contrairement à la force et au déplacement qui sont des vecteurs.

Exemple 1 :

L'effort musculaire requis pour lever un objet dépende à la fois de son poids (la force pesanteur qui s'exerce sur lui), et de la hauteur h à laquelle on l'enlève.

Dans ce cas la force du poids est dirigée vers le bas, le déplacement vers le haut et θ vaut 180°.

W =P.H.cosπ= - P.h = - mgh.

Le travail de la force du poids est négatif puisqu'il faut fournir un travail musculaire contre la force pesanteur.

Exemple 2 :

Pour soulever une voiture dont la masse vaut une tonne et demi, il faut une force F d'une valeur de 15 000N vertical à la voiture.

Calculer le travail fourni par cette force pour déplacer la voiture d'une hauteur (AB) de 3 mètres.

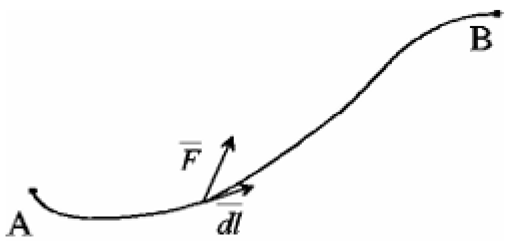
Corrigé : $\boldsymbol{W_{AB}(\vec{F}) = |\vec{F}|.|\overrightarrow{AB}|.\cos\alpha}$**=F.d.cos 0** =1.5 10^4 . 3=4.5 10^4 J

I.2. Le travail effectué par une force variable

Dans le cas où la force varie en intensité et/ou en direction, lors du déplacement, et que celui-ci a une forme quelconque, il faut faire appel au calcul intégral pour généraliser la définition du travail. Généralement le travail d'une force dépend du chemin suivi, c'est pourquoi ce travail élémentaire est nécessaire.

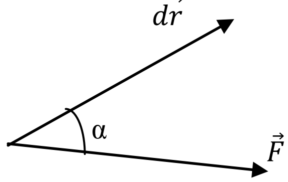
$$\mathbf{dW=\vec{F}.\overrightarrow{dr} = \vec{F}.\overrightarrow{dl}}$$

où dl est un déplacement infinitésimal le long de la trajectoire, il est tangentiel à celle-ci.



Le travail élémentaire **dW** effectuer par une force $\vec{\mathbf{F}}$ sur une masse ponctuelle m pendant un déplacement élémentaire **dr= dl** est donné par :

$$\mathbf{dW=\vec{F}.\overrightarrow{dr}=|\vec{F}|.|\overrightarrow{dr}|\cos(\vec{F},\overrightarrow{dr})}$$

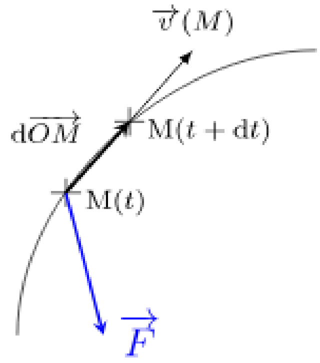


Pour obtenir le travail sur un déplacement AB, on intégrera ce travail élémentaire :

$$\mathbf{W=\int dW = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dr} = \int \boldsymbol{F.dr.\cos\alpha}}$$

α est l'angle entre les deux vecteurs $\vec{F}\ et\ \overrightarrow{dr}$; $\alpha = (\vec{F},\overrightarrow{dr})$

I.3. La puissance



Soit un point M qui se déplace sur sa trajectoire à une vitesse $\vec{v}$(M) par rapport au référentiel d'étude, Il subit une force $\vec{F}$(M) telle qu'il

est indiquée sur la figure ci-contre :

La puissance d'une force $\vec{F}$ est le travail par unité de temps.

On distingue :

- La puissance moyenne $P_{moy} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$
- La puissance instantanée $P = \frac{dW}{dt}$

Alors la puissance instantanée de la force $\vec{F}$ s'écrit :

$$P(\vec{F}) = \frac{dW}{dt} = \frac{|\vec{F}|.|\overrightarrow{dr}|}{dt} = \vec{F}\,.\,\vec{v}\,(M) = \|\vec{F}\| \times \|\vec{v}\,(M)\| \times \cos\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Remarque :

- ✓ L'unité de la puissance est le « Watt ».
- ✓ Cette force peut être qualifiée de trois sortes :
  - Elle est motrice, si sa puissance est positive ce qui correspond à un angle $\alpha < \frac{\pi}{2}$.
  - Elle est résistante, si sa puissance est négative ce qui correspond à un angle $\alpha > \frac{\pi}{2}$.
  - Enfin, elle peut être de puissance nulle, alors $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

II. l'Energie

L'énergie est définie en physique comme la capacité d'un système à produire un travail. L'énergie n'est pas une substance matérielle : c'est une grandeur physique qui caractérise l'état d'un système ; elle peut être stockée et existe sous de nombreuses formes.

II.1. Energie cinétique

Afin d'accélérer une masse ponctuelle et l'amener à une vitesse définie, on doit fournir du travail. Ce travail est alors emmagasiné dans cette masse ponctuelle sous la forme d'énergie cinétique.

Supposons que la vitesse initiale de l'objet soit v_0 et que la force F soit appliquée dans le sens de v_0 et produise un déplacement d=dr.

Nous avons dW = $F.\,dr$ et $F = ma = m\frac{dv}{dt}$

Partant de cette expression on peut déduire ce qui suit :

$dW = F\,dr = m\frac{dv}{dt}\,dr$

$\Rightarrow dW = m\,\frac{dr}{dt}\,dv \quad alors \quad dW = mvdv$

Intégrons l'expression du travail élémentaire, et tirons la définition de l'énergie cinétique :

$$W = m\int_A^B vdv \quad \Rightarrow W = \frac{1}{2}\,m(v_B^2 - v_A^2) = \frac{1}{2}\,mv_B^2 - \frac{1}{2}\,mv_A^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Où v_A est la vitesse du mobile au point *A* et v_B sa vitesse au point *B*.

L'énergie cinétique d'un point matériel de masse *m* et de vitesse instantanée $\vec{v}$ est donnée par l'expression :

$$Ec = \frac{1}{2}mv^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

(2) et (3) nous donne : $\boldsymbol{W_{\vec{F}(A\to B)} = E_{C_B} - E_{C_A} = \Delta E_c}$

Et puisque *p=mv*, on peut écrire aussi :

$$Ec = \frac{P^2}{2m}$$

Enoncé du Théorème de l'énergie cinétique :

La variation de l'énergie cinétique d'un point matériel soumis à un ensemble de forces extérieures entre deux positions A et B est égale à la somme des travaux de ces forces entre ces deux points.

$$\boldsymbol{W_{\vec{F}(A\to B)} = E_{C_B} - E_{C_A} = \Delta E_c \;\Rightarrow \sum_i W_i = \Delta E_C}$$

II.2. Forces conservatives

On dit d'une force qu'elle est conservative, ou dérivant d'un potentiel, si son travail est indépendant du chemin suivi, quel que soit le déplacement probable entre le point de départ et le point d'arrivée.

On distingue comme force conservatives, la force de pesanteur, la force de rappel du ressort et la force de tension du fil.

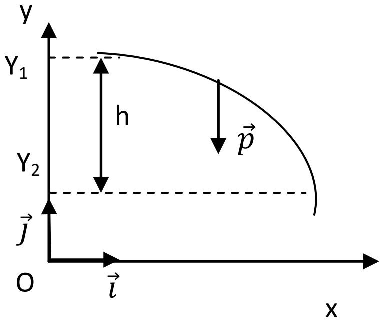
Exemple : Calculons le travail de la force de pesanteur.

$dW = \vec{p}.\overrightarrow{dl}$ avec $p = -mg\,\vec{j}$

$\overrightarrow{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$ donc $dW = -mgdy$

$$W = -mg\int_{y_1}^{y_2} dy = -mg(y_2 - y_1)$$

$$\Rightarrow W = mg(y_1 - y_2) = mgh$$



Donc la force de pesanteur $\vec{p}$ est une force conservative car son travail ne dépend pas du chemin suivi et on dit qu'elle dérive d'un potentiel.

La force de rappel du ressort est aussi une force conservative.

Remarque :

Une force est dite **non conservative** si son travail dépend du chemin suivi comme la force de frottement.

II.3. Energie potentielle

L'énergie potentielle est une fonction de coordonnées, telle que l'intégration entre ses deux valeurs prises au départ et à l'arrivée. Elle représente le travail fourni à la particule pour la déplacer de sa position initiale à la position finale.

Si la force $\vec{F}$ est une force dérivant d'un potentiel (conservative), alors :

$$W = \int_A^B \overrightarrow{F_C}.\overrightarrow{dr} = E_{P_A} \_ E_{P_B} \quad \Rightarrow dW = -dE_p$$

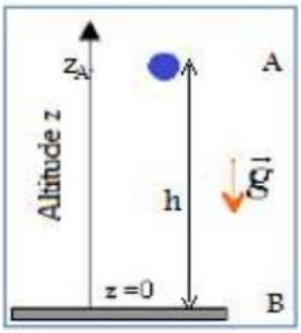
$$\text{d'où} \quad \boldsymbol{W_{A\to B}(\overrightarrow{\mathrm{F}_C})) = -\Delta E_p}$$

L'énergie potentielle est toujours rapportée à **un référentiel** pris comme origine pour la calculer (E_p=0).

La fonction de l'énergie potentielle E_p est déterminée à une constante près.

Par identification des deux expressions dE_p et dW, on arrive au résultat : La différentielle de l'énergie potentielle est égale et de sens opposé à la différentielle du travail.

Exemple 1 : Poids



La force du poids est une force conservative, d'où :

$W_{A\to B}(\overrightarrow{\mathrm{F}_C})) = -\Delta E_p$

Et $W = mg(Z_A - Z_B) = mgH$

Alors $W_{\vec{p}} = -\Delta E_p = -\left(E_{pf} - E_{pi}\right) = Epi = mg(z_A - z_B) = mgH$

car E_{pf} =0 est l'énergie potentiel de référence (le sol).

$$\Rightarrow \Delta Ep = Epf - Epi = mgH$$

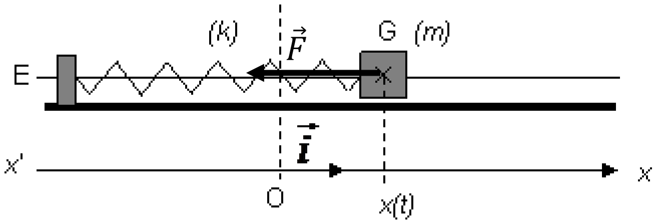
$$\Rightarrow Ep = mgH$$

Remarque :

Si $Z_A > Z_B$ on a $E_p>0$

Si $Z_A < Z_B$ on a $E_p<0$

Exemple 2 : Force de rappel du ressort



$\vec{F} = -kx\vec{\imath}$, $\overrightarrow{dl} = dx.\vec{\imath}$ et $dW = \vec{F}.\overrightarrow{dl}$

$dW = -dE_p = -kx.dx \Rightarrow dE_p = kxdx$

$$\Rightarrow \int dEp = k\int_{x_i}^{x_f} xdx$$

$$\Rightarrow Ep = \frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2) = \frac{1}{2}kx^2$$

II.4. L'énergie mécanique (Energie Totale)

L'énergie mécanique d'un point matériel à un instant donné est égale à la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle :

$$E_M = E_C + E_p \Rightarrow E_M = E_C + E_p$$

Principe de la conservation de l'énergie mécanique

Dans le champ de ***force conservatrice*** (ou dérivant d'un potentiel) l'énergie mécanique se conserve au cours du temps.

$$E_M = E_C + E_p = Cte$$

Cela veut dire que la variation de l'énergie mécanique est nulle $\Delta E_M = 0$, cela veut dire aussi que la variation de l'énergie cinétique est égale à l'opposé de la variation de l'énergie potentielle :

$$\Delta E_c = -\Delta E_p$$

En d'autres termes, si le système est isolé ou libre ; l'énergie mécanique est conservée.

Remarque : cas des forces non conservatives :

- Dans le cas de la présence de force de frottements, la variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces de frottement W_{Ffrott}:

$$\Delta E_M = \sum W_{A\to B}(\overrightarrow{F_{NC}}) = W_{A\to B}(\overrightarrow{F_{frot}})$$

- Travail de la force du frottement :

$$W_{A\to B}(\overrightarrow{F_{frot}}) = -F_f.AB$$

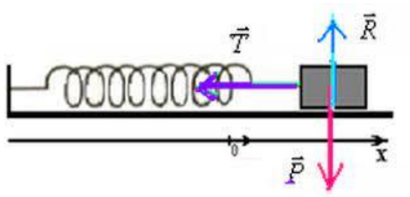
Exemple :

Une masse m est liée à un ressort de raideur k, l'autre extrémité du ressort est liée au point C. La masse m peut glisser sur la surface horizontale. En premier lieu la masse est au repos au point O d'équilibre.

1) On suppose qu'il n'existe pas de frottement, on déplace la masse m du point O au point A, tel que OA=a. Déterminer le travail de la force de rappel du ressort, quand m se déplace de O à A. Déterminer alors la vitesse de m au point O.

2) Mêmes questions que la question 1, mais maintenant on suppose qu'il existe des frottements, on donne le coefficient de frottement dynamique μ_c.

Corrigé :



1- On a, $\vec{F} = -kx\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{dl} = dx\vec{\imath}$

$$\Rightarrow W_{\vec{F}} = \int dW_{\vec{F}} = \int \vec{F}.\overrightarrow{dl} = -k\int_a^0 xdx = \frac{1}{2}ka^2$$

On a aussi : $\sum_i \boldsymbol{W_i} = \boldsymbol{\Delta E_C} = W_{\vec{p}} + W_{\vec{R}} + W_{\vec{F}}$

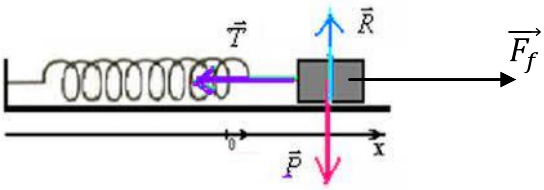
Avec $W_{\vec{p}} = W_{\vec{R}} = \vec{0}$ car $\vec{R}\ et\ \vec{p} \perp \overrightarrow{Ox}$

Donc $\boldsymbol{\Delta E_C} = W_{\vec{F}} = \frac{1}{2}ka^2 = \frac{1}{2}mv_O^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$ avec v_A=0

D'où, $\boldsymbol{v_o} = \boldsymbol{a}\sqrt{\frac{k}{m}}$

2- Cas de frottement,

On a aussi : $\sum_i \boldsymbol{W_i} = \boldsymbol{\Delta E_C} = W_{\vec{p}} + W_{\vec{R}} + W_{\overrightarrow{F_f}} + W_{\vec{F}}$



Avec $W_{\vec{p}} = W_{\vec{R}} = \vec{0}$

Donc $\boldsymbol{\Delta E_C} = W_{\vec{F}} + W_{\overrightarrow{F_f}} = \frac{1}{2}ka^2 - a.F_f = \frac{1}{2}ka^2 - a.\mu_c.mg = \frac{1}{2}mv_o^2$ car v_A=0

D'où, $\boldsymbol{v_o} = \sqrt{\frac{ka^2}{m} - 2\mu_c.a.g} = \boldsymbol{a}\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{2\mu_c.g}{a}}$

Références :

[1] https://www.kartable.fr/ressources/physique-chimie/cours/travail-et-energie/22635.

[2] https://www.physagreg.fr/mecanique-14-travail-energies.php.

[3] Dr. Larbi KAHAL, Polycopié de PHYSIQUE1: MÉCANIQUE DU POINT Rappels de cours & Exercices résolus. Université des Sciences et de la Technologie d'Oran. 2016/2017.