Anlyse 1
Mathématiques

2023/2024

Chapitre 1

La droite réelle

Exercice 1

Établir que pour tout $(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4$

1. $|x+y| \leq |x|+|y|$.
2. $|x-y| \geq ||x|-|y||$.
3. $||x|-|y|| \leq |x|+|y|$ en déduire que $||x-u|-|y-v|| \leq |x-u|+|y-v|$
4. $|ux-vy| \leq \sqrt{(x^2+y^2)(u^2+v^2)}$.

Exercice 2

Soient A, B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. Montrer que:

1. Si $A \subset B$ alors $\inf B \leq \inf A$ et $\sup A \leq \sup B$.
2. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A,\ \sup B)$.
3. $\inf(A \cup B) = \min(\inf A,\ \inf B)$.
4. Si $A \cap B \neq \varnothing$ alors
   (a) $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$.
   (b) $\inf(A \cap B) \geq \max(\inf A, \inf B)$.
5. On pose $A+B = \{x+y : x \in A \text{ et } y \in B\}$, montrer que:
   (a) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.
   (b) $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$.

Exercice 3

Soit l'ensemble $E = \left\{ \dfrac{\cos(m\pi)}{m} + e^{-|n|} :\ n \in \mathbb{Z} \text{ et } m \in \mathbb{Z}^* \right\}$

1. Montrer que E est borné.
2. Déterminer, s'ils existent, $\sup E$, $\inf E$, $\max E$, $\min E$.

Exercice 4

Soit l'ensemble $E = \left\{ \dfrac{1}{(-1)^m m + (-1)^n n} :\ (n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \right\}$.

1. Montrer que $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : (-1)^m m + (-1)^n n \neq 0$.

2. Déterminer, s'ils existent, $\sup E$, $\inf E$, $\max E$, $\min E$.

Exercice 5

Déterminer, s'ils existent, la borne supérieure, la borne inférieure, le maximum et le minimum de chacun des ensembles suivants:

1. $E_1 = \left\{ \dfrac{2}{n+1} : \ n \in \mathbb{N} \right\}.$
2. $E_2 = \left\{ 1 + \dfrac{n}{3} : \ n \in \mathbb{N} \right\}.$
3. $E = \left\{ \dfrac{n^2-1}{n^2+1} : \quad n \in \mathbb{N} \right\}$ (posé en sujet d'examen)
4. $E_3 = \left\{ (-1)^n + \dfrac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}^* \right\}.$
5. $E_4 = \left\{ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} : \ n \in \mathbb{N} \right\}.$
6. $E_5 = \left\{ \dfrac{1}{n} + \sin\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right) : \ n \in \mathbb{N}^* \right\}.$ (Supplémentaire)

Exercice 6

1. Montrer que

   (a) $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R} : \ E(n+x) = n + E(x).$

   (b) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ E(x+y) - E(x) - E(y) \in \{0,1\}.$

   (c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a \in \mathbb{R} : \ a < \dfrac{E(na)+1}{n} \leq a + \dfrac{1}{n}.$

   (d) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R} : \ E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right) = E(x).$

Exercice 7 (Supplémentaire)

Soit $E = \left\{ \dfrac{n+1}{n+2} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) : \ n \in \mathbb{N} \text{ et } x \in [-1,1] - \{0\} \right\}$

1. On pose

$$A = \left\{ \frac{n+1}{n+2} : \ n \in \mathbb{N} \right\} \text{ et } B = \left\{ \sin\left(\frac{1}{x}\right) : x \in [-1,1] - \{0\} \right\}$$

   (a) Vérifier que A et B sont bornés.

   (b) Déterminer $SupA$, $\inf A$, $SupB$ et $\inf B$.

2. En déduire que E est borné et déterminer $SupE$ et $\inf E$.
3. Est ce que $MaxE$ et $\min E$ existent?