Chapitre 3

Les suites numériques réelles

4.1 Généralités

4.1.1 Définition

E étant un ensemble non vide,
On appelle suite d'éléments de E toute application u telle que

$$\begin{array}{rccl} u\colon & \mathbb{N} & \longrightarrow & E \\ & n & \longmapsto & u(n) \equiv u_n \end{array}$$

On la note $\boldsymbol{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}}$

- On peut remplacer $\mathbb{N}$ par un ensemble $A = \{n_1, n_1+1, n_1+2, \dots\}$.
- Si $E = \mathbb{R}$ la suite $(u_n)_n$ est dite **suite numérique réelle de terme général $\boldsymbol{u_n}$**.

Dans tout ce chapitre $E = \mathbb{R}$.

Exemple

1. $(u_n)_{n\geq 1}$, où $u_n = \dfrac{1}{n}$.
2. $(u_n)_{n\geq 0}$, où $u_n = (-1)^n$.
3. $(u_n)_{n\geq 2}$, où $u_n = \sqrt{n^2-2}$.

4.1.2 Egalité de deux suites

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites .

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff u_n = v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

.

4.1.3 Opérations sur les suites

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On pose :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $w_n = u_n + v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} . (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $w_n = u_n.v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
3. $\lambda. (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $w_n = \lambda.u_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

4.1.4 Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée $\iff \exists M \in \mathbb{R} \mid u_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée $\iff \exists m \in \mathbb{R} \mid u_n \geq m \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée $\iff \exists M, m \in \mathbb{R} \mid m \leq u_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
4. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée $\iff \exists \alpha \in \mathbb{R}^+ \mid |u_n| \leq \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

4.1.5 Définition

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante $\iff u_{n+1} \geq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. On écrit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \uparrow$.
2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante $\iff u_{n+1} > u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante $\iff u_{n+1} \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. On écrit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \downarrow$.
4. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante $\iff u_{n+1} < u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
5. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone $\iff (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\uparrow$ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\downarrow$.
6. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement monotone $\iff (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante ou strictement décroissante.

Théorème 4.1.5.1 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. On a*

1. *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante* $\iff \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
2. *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante* $\iff \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Exemple Étudier la monotonie de la suite de terme général : $u_n = \dfrac{1}{n}$.

$u_n = \dfrac{1}{n} > 0 \quad \forall n \geq 1$

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n}{n+1} < 1 \quad \forall n \geq 1$, donc $(u_n)_{n\geq 1} \downarrow$ strictement.

4.2 Les suites convergentes

4.2.1 Définition

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et l un réel.

$$\begin{aligned}(u_n)_n \text{ converge vers } l &\iff \forall\varepsilon>0 \quad \exists n_0\in\mathbb{N} \mid \forall n \quad (n\geq n_0 \implies |u_n-l|<\varepsilon)\\ &\iff \forall\varepsilon>0 \quad \exists n_0\in\mathbb{N} \mid \forall n \quad (n\geq n_0 \implies l-\varepsilon<u_n<l+\varepsilon)\end{aligned}$$

Remarque $(u_n)_n$ converge vers l $\iff \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N} \mid \forall n \quad (n\geq n_0 \implies |u_n-l|<\varepsilon)$

1. le n_0 de la définition précédente est appelé **rang** , il dépend de ε.
2. le rang n_0 n'est pas unique , en effet tout entier naturel $n_1\geq n_0$ convient comme autre rang. Et c'est pour cette raison que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers l si et seulement si $(u_n)_{n\geq n_1}$ converge vers l
3. Pour montrer que $(u_n)_n$ converge vers l ; il suffit de montrer que pour tout ε "très petit" il y'a un rang n_0 à partir du quel $(l-\varepsilon<u_n<l+\varepsilon)$.

Théorème 4.2.1.1 *Si $(u_n)_n$ converge vers l alors l est unique , on l'appelle la limite de la suite $(u_n)_n$ et on note :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

Démonstration 4.2.1.1 *Par hypothèse $(u_n)_n$ converge vers l , montrons que l est unique. Par l'absurde supposons que l n'est pas unique :*

$$\exists l'\in\mathbb{R} \mid (u_n)_n \textit{ converge vers } l' \textit{ et } l'\neq l$$

$$l'\neq l \implies l>l' \textit{ ou bien } l'>l$$

Supposons que $l>l'$:

$$l>l' \implies \frac{l-l'}{2}>0$$

Posons alors

$$\varepsilon=\frac{l-l'}{2}$$

Pour cet ε, on a :

$$\begin{aligned}(u_n)_n \textit{ converge vers } l &\implies \exists n_0\in\mathbb{N} \mid \forall n \quad \left(n\geq n_0 \implies |u_n-l|<\frac{l-l'}{2}\right) && (4.1)\\ &\implies \exists n_0\in\mathbb{N} \mid \forall n \quad \left(n\geq n_0 \implies \frac{l+l'}{2}<u_n<\frac{3l-l'}{2}\right) && (4.2)\end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned}(u_n)_n \textit{ converge vers} l' &\implies \exists n_1\in\mathbb{N} \mid \forall n \quad \left(n\geq n_1 \implies |u_n-l'|<\frac{l-l'}{2}\right) && (4.3)\\ &\implies \exists n_1\in\mathbb{N} \mid \forall n \quad \left(n\geq n_1 \implies \frac{3l'-l}{2}<u_n<\frac{l+l'}{2}\right) && (4.4)\end{aligned}$$

donc

$$\forall n\ (n \geq Max(n_0, n_1)\ \Longrightarrow \begin{cases} u_n < \dfrac{l+l'}{2} & \text{\textit{d'après (4.4)}} \\ u_n > \dfrac{l+l'}{2} & \text{\textit{d'après (4.2)}} \end{cases}$$

Ce qui est impossible. donc $l < l'$ et on refait le même travail et on aboutit à une absurdité d'ou $l = l'$

Exemple

1. Soit une suite de terme général $u_n = a$ où a est une constante réelle, une telle suite est dite : suite constante. Montrer que $(u_n)_n$ converge vers a.
   Soit
   $$\varepsilon > 0$$
   on cherche un entier naturel
   $$n_0$$
   qui vérifie
   $$\forall n\ (n \geq n_0\ \Longrightarrow\ |u_n - a| < \varepsilon)$$
   or
   $$|u_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon$$
   Par conséquent n'importe quelle valeur de n convient comme n_0.
2. Soit une suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$
   Montrer que $(u_n)_n$ converge vers 0. Soit
   $$\varepsilon > 0$$
   on cherche un entier naturel
   $$n_0$$
   qui vérifie
   $$\forall n : \quad n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - 0| < \varepsilon$$
   or
   $$|u_n - 0| = \frac{1}{n}$$
   donc
   $$\begin{aligned} \forall n : \quad n \geq n_0 &\Longrightarrow |u_n - 0| < \varepsilon \\ &\Longrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \end{aligned}$$
   Pour cela résolvons l'inégalité suivante :
   $$\frac{1}{n} < \varepsilon$$
   On a
   $$\frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$$
   Comme $\mathbb{R}$ est Archimédien alors
   $$\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid\ n_0 > \frac{1}{\varepsilon} \quad (1)$$

Vérifions que ce n_0 convient :

$$\begin{aligned}\forall n: \quad n \geq n_0 &\implies \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} \\ &\implies \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon \quad \text{d'après (1)} \\ &\implies \frac{1}{n} < \varepsilon\end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration.

4.2.2 Définition

1. $(u_n)_n$ est convergente $\iff \exists l \in \mathbb{R} \mid (u_n)_n$ converge vers l.
2. Une suite qui ne converge pas est dite divergente.
3. Étudier la nature d'une suite revient à établir si elle est convergente ou divergente.

Corolaire

1. Si $(u_n)_n$ converge vers l et que $l > 0$ alors $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid u_n > 0 \quad \forall n \geq n_0$.
2. Si $(u_n)_n$ converge vers l et que $l < 0$ alors $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid u_n < 0 \quad \forall n \geq n_0$.

Démonstration 4.2.2.1

$$(u_n)_n \textit{ converge vers } l \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \quad (n \geq n_0 \implies l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon)$$

Commençons par le cas $l > 0$, et posons

$$\varepsilon = l$$

D'après la définition de la limite :

$$\begin{aligned}\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n: \quad n \geq n_0 &\implies l - l < u_n < l + l \\ &\implies 0 < u_n < 2l \\ &\implies 0 < u_n\end{aligned}$$

Donc

$$\forall n \geq n_0 \quad u_n > 0$$

d'où le résultat.
Même travail dans le cas $l < 0$.

Exemple Montrer que la suite de terme général $u_n = (-1)^n$ est divergente.

Par l'absurde supposons que $u_n = (-1)^n$ converge. Posons alors

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l$$

D'après le corolaire :

Si $l > 0$ alors les termes de la suite seraient strictement positifs à partir d'un certain rang ce qui est impossible.

Si $l < 0$ alors les termes de la suite seraient Strictement négatifs à partir d'un certain rang ce qui est impossible.

On conclut que $l = 0$

Montrons que c'est aussi impossible :

$$\begin{aligned} \left((-1)^n\right)_n \text{ converge vers } 0 &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n : \quad n \geq n_0 \implies |(-1)^n| < \varepsilon \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n : \quad n \geq n_0 \implies 1 < \varepsilon \end{aligned}$$

Ce qui est absurde.Par conséquent la suite $(u_n)_n$ diverge.

Théorème 4.2.2.1 *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration 4.2.2.2 *Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite qui converge vers* l.
Pour $\varepsilon = 1$, *on a*

$$\begin{aligned} \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n : n \geq n_0 &\implies |u_n - l| < 1 \\ &\implies l - 1 < u_n < l + 1 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{array}{llccccc} \forall n : & n \geq n_0 & \implies & l-1 & < & u_n & < & l+1 \\ \forall n : & n \leq n_0 - 1 & \implies & u_n & \leq & u_n & \leq & u_n \end{array}$$

Par conséquent

$$min(l-1, u_{n_0-1}, \ldots, u_0) \leq u_n \leq max(1+l, u_{n_0-1}, \ldots, u_0)$$

d'où on a trouvé

$$\alpha = min(l-1, u_{n_0-1}, \ldots, u_0) \quad et \quad \beta = max(1+l, u_{n_0-1}, \ldots, u_0)$$

tels que

$$\alpha \leq u_n \leq \beta \quad \forall n$$

ce qui termine la démonstration.

Remarque

1. Une suite bornée n'est pas forcémment convergente (exemple la suite de terme général $(-1)^n$ diverge pourtant elle est bornée).
2. Si $(u_n)_n$ n'est pas bornée alors $(u_n)_n$ est divergente.

4.3 Opérations sur les suites convergentes

Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ deux suites convergentes, on a :

1. $(u_n+v_n)_n$ converge et $\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=\lim_{n\to+\infty}u_n+\lim_{n\to+\infty}v_n$.
2. $(u_n.v_n)_n$ converge et $\lim_{n\to+\infty}(u_n.v_n)=(\lim_{n\to+\infty}u_n).(\lim_{n\to+\infty}v_n)$.
3. $(\lambda.u_n)_n$ converge et $\lim_{n\to+\infty}(lambda.u_n)=\lambda.\lim_{n\to+\infty}u_n$.
4. Si
$$\lim_{n\to+\infty}v_n\neq 0$$
alors
$$\exists N\in\mathbb{N}\mid v_n\neq 0\quad\forall n\geq N$$
on a alors
$$\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\geq N}$$
converge et
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=\frac{\lim_{n\to+\infty}u_n}{\lim_{n\to+\infty}v_n}$$
5. Si $u_n\leq v_n\quad\forall n$ alors $\lim_{n\to+\infty}u_n\leq\lim_{n\to+\infty}v_n$.
6. Si $u_n<v_n\quad\forall n$ alors $\lim_{n\to+\infty}u_n\leq\lim_{n\to+\infty}v_n$.

Exemple Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature de la suite de terme général u_n :

1. $u_n=\dfrac{1}{n^2}$.
$\left(\dfrac{1}{n}\right)_n$ converge donc $\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{1}{n}.\dfrac{1}{n}$ converge car c'est le produit de deux suites convergentes de plus
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\right)^2=0.0=0.$$
2. $u_n=\dfrac{1+2n}{2+n^2}$
$$u_n=\frac{1+2n}{2+n^2}=\frac{n\left(\frac{1}{n}+2\right)}{n^2\left(\frac{2}{n^2}+1\right)}=\frac{\left(\frac{1}{n}+2\right)}{n\left(\frac{2}{n^2}+1\right)}=\frac{1}{n}.\frac{\frac{1}{n}+2}{\frac{2}{n^2}+1}$$
Or
$$\frac{1}{n}+2$$
converge car somme de la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_n$ et de la suite constante $(2)_n$ qu'on a démontré convergentes de plus
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}+2\right)=2+0=2$$
de même
$$\frac{2}{n^2}+1$$

converge car c'est la somme de deux suites convergentes, de plus

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{n^2}+1\right)=1+0=1$$

Comme $1\neq 0$ alors

$$\frac{\frac{1}{n}+2}{\frac{2}{n^2}+1}$$

converge car c'est le rapport de deux suites convergentes et

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}+2}{\frac{2}{n^2}+1}\right)=\frac{2}{1}=2$$

Et enfin

$$\frac{1}{n}.\frac{\frac{1}{n}+2}{\frac{2}{n^2}+1}$$

est convergente car c'est le produit de deux suites convergentes et

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}.\frac{\frac{1}{n}+2}{\frac{2}{n^2}+1}\right)=0$$

4.4 Quelques théorèmes sur les suites convergentes

Théorème 4.4.0.1 *Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ deux suites, on a :*

1. *Si $(u_n)_n$ converge vers l alors $(|u_n|)_n$ converge vers $|l|$.*
2. *Si $(|u_n|)_n$ converge vers 0 alors $(u_n)_n$ converge vers 0.*
3. *Si $(u_n)_n$ converge vers 0 et $(v_n)_n$ est bornée alors $(u_n.v_n)_n$ converge vers 0.*

Démonstration 4.4.0.1 *Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ deux suites convergentes.*

1. *On suppose $(u_n)_n$ converge vers l et on démontre que $(|u_n|)_n$ converge vers $|l|$.*

$$\begin{aligned}(u_n)_n \text{ converge vers } l &\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0\quad \exists n_0 \mid \forall n\ (n\geq n_0 \Longrightarrow |u_n-l|<\varepsilon)\\ &\Longrightarrow \forall\varepsilon>0\quad \exists n_0 \mid \forall n\ (n\geq n_0 \Longrightarrow ||u_n|-|l||\leq|u_n-l|<\varepsilon)\\ &\Longrightarrow \forall\varepsilon>0\quad \exists n_0 \mid \forall n\ (n\geq n_0 \Longrightarrow ||u_n|-|l||<\varepsilon)\end{aligned}$$

   d'ou le résultat.

2. *Si $(|u_n|)_n$ converge vers 0 alors $(u_n)_n$ converge vers 0.*
   On suppose que $(|u_n|)_n$ converge vers 0

$$\begin{aligned}(|u_n|)_n \text{ converge vers } 0 &\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0\quad \exists n_0\in\mathbb{N} \mid \forall n\quad (n\geq n_0 \Longrightarrow ||u_n|-0|<\varepsilon)\\ &\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0\quad \exists n_0\in\mathbb{N} \mid \forall n\quad (n\geq n_0 \Longrightarrow ||u_n||<\varepsilon)\\ &\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0\quad \exists n_0\in\mathbb{N} \mid \forall n\quad (n\geq n_0 \Longrightarrow |u_n|<\varepsilon)\\ &\Longleftrightarrow (u_n)_n \text{ converge vers } 0\end{aligned}$$

   D'où le résultat.

3. *On suppose $(u_n)_n$ converge vers 0 et $(v_n)_n$ est bornée et on montre que $(u_n.v_n)_n$ converge vers 0 :*
   Soit
$$\varepsilon > 0$$
   on cherche un entier naturel
$$n_0$$
   qui vérifie
$$\forall n \ (n \geq n_0 \implies |u_n.v_n| < \varepsilon)$$
$$(v_n)_n \textit{ est bornée} \implies \exists \beta > 0 \mid |v_n| \leq \beta \quad \forall n$$
   On a
$$|u_n.v_n| = |u_n| \, . \, |v_n| \leq \beta \, |u_n| \quad \forall n$$
   Pour
$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\beta} > 0$$
$$\begin{aligned} \exists n_1 \in \mathbb{N} \ \mid \ \forall n : \quad n \geq n_1 &\implies |u_n| < \frac{\varepsilon}{\beta} \\ &\implies \beta . \, |u_n| < \beta . \frac{\varepsilon}{\beta} = \varepsilon \\ &\implies |u_n.v_n| \leq \beta \, |u_n| < \varepsilon \\ &\implies |u_n.v_n| < \varepsilon \end{aligned}$$
   On posera alors $n_0 = n_1$

Exemple Déterminer la nature des suites de terme général $(u_n)_n$

1. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$
$$|u_n| = \frac{1}{n}$$
   Or on a déjà démontré que la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_n$ converge vers 0
   par conséquent la suite
$$(|u_n|)_n \text{ converge vers } 0$$
   donc d'après le théorème précédent la suite $(u_n)_n$ converge vers 0.

2. $u_n = \dfrac{\cos n}{n}$
   On a
$$\begin{cases} |\cos n| \leq 1 \\ \left(\dfrac{1}{n}\right)_n \text{ converge vers } 0 \end{cases} \implies (u_n)_n \text{ converge vers } 0$$

Théorème 4.4.0.2 ***Théorème de convergence des suites monotones***

1. *Toute suite croissante majorée est convergente de plus sa limite est égale à sa borne supérieure.*
2. *Toute suite décroissante minorée est convergente de plus sa limite est égale à sa borne inférieure.*

Démonstration 4.4.0.2 *Soit $(u_n)_n$ une suite ;*
Si $(u_n)_n$ est $\uparrow$et majorée montrons alors qu'elle est convergente.

Posons $E = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ On a

$$\begin{cases} E \neq \emptyset \\ et \\ E \text{ est majorée} \end{cases} \implies \sup E existe$$

Posons

$$M = \sup E$$

Montrons que $(u_n)_n$ converge vers M :
Soit $\varepsilon > 0$ trouvons $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \quad (n \geq n_0 \implies |u_n - M| < \varepsilon)$$

Comme

$$M = \sup u_n$$

D'après la caractérisation de la borne supérieure

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid M - \varepsilon < u_{n_0} \leq M \quad (1)$$

Or

$$(u_n)_n \text{ est croissante}$$

donc

$$\forall n \quad : n \geq n_0 \implies u_n \geq u_{n_0}$$

$$\begin{aligned} \forall n \quad : n \geq n_0 &\implies u_n \geq u_{n_0} > M - \varepsilon \quad d'après\ (1) \\ &\implies M - \varepsilon < u_n \\ &\implies M - \varepsilon < u_n \leq M \quad carMmajoreE \\ &\implies M - \varepsilon < u_n < M + \varepsilon \quad car\ M < M + \varepsilon \end{aligned}$$

d'ou le résultat.
Même raisonnement si la suite est décroissante minorée.

Exemple
Pour $n \geq 1$ on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}$$

1. Ecrire les trois premiers termes de $(u_n)_n$.

$$\begin{aligned} u_1 &= \textstyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{1+k} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}. \\ u_2 &= \textstyle\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{2+k} = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

2. Étudier la nature de cette suite.
   Étudions la monotonie de $(u_n)_n$:

$$\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n &= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\\
&= \left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n+2}\right)-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)\\
&= \left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}\right)\\
&= \frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\\
&= \frac{1}{(2n+2)(2n+1)}.
\end{aligned}$$

   donc Donc $(u_n)_n$ $\uparrow$(strictement).

   Vérifions si $(u_n)_n$ est majorée :

   On a

$$\left.\begin{array}{ccc}
\frac{1}{n+1} & \leq & \frac{1}{n+1}\\
\frac{1}{n+2} & \leq & \frac{1}{n+1}\\
\vdots & \vdots & \vdots\\
\frac{1}{n+n} & \leq & \frac{1}{n+1}
\end{array}\right\}\Longrightarrow u_n\leq\frac{n}{n+1}<1$$

   Par conséquent $(u_n)_n$ est majorée par 1.
   Conclusion : $(u_n)_n$ est $\uparrow$et majorée donc elle est convergente.

Remarque

1. Si $\exists n_1$ tel que $(u_n)_{n\geq n_1}$ est croissante et elle est majorée alors elle est convergente.
2. Si $\exists n_1$ tel que $(u_n)_{n\geq n_1}$ est décroissante et elle est minorée alors elle est convergente.

Théorème 4.4.0.3 *Théorème des trois suites*
Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ et $(w_n)_n$ trois suites telles que

$$\exists n_1\in\mathbb{N}\mid\forall n\geq n_1\quad u_n\leq w_n\leq v_n$$

Si $(u_n)_n, (v_n)_n$ *convergent vers une même limite l*

alors $(w_n)_n$ *converge et elle converge vers l.*

Démonstration 4.4.0.3 *Soit $\varepsilon>0$ on cherche n_0 tel que*

$$\forall n\quad (n\geq n_0\Longrightarrow |w_n-l|<\varepsilon)$$

Pour cet ϵ :

$$\begin{aligned}
&\exists n_2\in\mathbb{N}\mid\forall n:\ n\geq n_2\Longrightarrow l-\epsilon<u_n<l+\epsilon\\
&\exists n_3\in\mathbb{N}\mid\forall n:\ n\geq n_3\Longrightarrow l-\epsilon<v_n<l+\epsilon
\end{aligned}$$

Posons

$$n_0 = \max(n_1, n_2, n_3)$$

Vérifions que ce n_0 convient comme rang pour $(w_n)_n$:

$$\begin{aligned}
\forall n : n \geq n_0 \quad & \Longrightarrow \quad \begin{cases} l - \epsilon < u_n \\ v_n < l + \epsilon \\ u_n \leq w_n \leq v_n \end{cases} \\
& \Longrightarrow \quad l - \epsilon < u_n \leq w_n \leq v_n < l + \epsilon \\
& \Longrightarrow \quad l - \epsilon < w_n < l + \epsilon
\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration.

Remarque On retient ce résultat en utilisant le schéma suivant :

Si

$$\begin{array}{ccccc} u_n & \leq & w_n & \leq & v_n \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & l & & \end{array}$$

alors

$$\text{alors } (w_n)_n \text{ converge vers } l$$

Exemple Étudier la nature de la suite de terme général

$$u_n = \frac{[na]}{n}$$

où a étant une constante réelle.
On a

$$\begin{aligned}
[na] \leq na < 1 + [na] \quad & \Longrightarrow \quad na - 1 < [na] \leq na \\
& \Longrightarrow \quad a - \frac{1}{n} < \frac{[na]}{n} \leq a
\end{aligned}$$

Or Les suites $\left(a - \frac{1}{n}\right)_n$ et $(a)_n$ convergent toutes les deux vers a donc d'après le théorème des trois suites la suite $(u_n)_n$ converge et elle converge vers a.

Corollaire Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites telles que

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_1 \quad 0 \leq u_n \leq v_n$$

Si $(v_n)_n$ converge vers 0 **alors** $(u_n)_n$ converge 0.

4.5 La Notion de Sous suite

4.5.1 Définition

Soient

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle.
- $\varphi: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application **strictement croissante**

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$v_n = u_{\varphi(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

est dite **suite extraite** ou bien **sous suite** de la suite$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple

Etant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a

1. En posant $\varphi(n) = n$ qui est strictement croissante alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sous suite d'elle même.
2. En posant $\varphi(n) = 2n$ qui est strictement croissante alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = u_{2n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ est une sous suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
3. En posant $\varphi(n) = n+3$ qui est strictement croissante alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = u_{n+3}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ est une sous suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
4. En posant $\varphi(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \leq 5 \\ 7 & \text{si } n \geq 6 \end{cases}$.
   La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = u_{\varphi(n)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ n'est pas une sous suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car φ n'est pas strictement croissante.

Remarque

On retient la définition d'une sous suite en schématisant comme suit :

$$\begin{array}{ccccccc} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_n & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ u_{\varphi(0)} & u_{\varphi(1)} & u_{\varphi(2)} & u_{\varphi(3)} & \cdots & u_{\varphi(n)} & \cdots \end{array}$$

Avec $\varphi(0) < \varphi(1) < \varphi(2) < \varphi(3) \cdots < \varphi(n) < \cdots$

Remarque L'application φ de la définition d'une sous suite vérifie ce qui suit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi(n) \geq n$$

Théorème 4.5.1.1 *Soit $(u_n)_n$ une suite numérique*
Si *$(u_n)_n$ converge vers l* ***alors*** *toute sous suite de $(u_n)_n$ converge et elle converge vers l.*

Démonstration 4.5.1.1 *Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ de terme général $v_n = u_{\varphi(n)}$ oú φ est une application strictement croissante.*
On suppose que $(u_n)_n$ converge vers l et on démontre que $(v_n)_n$ converge vers l aussi. Soit

$$\varepsilon > 0$$

On cherche

$$n_0 \in \mathbb{N} \textit{tel que } \forall n : n \geq n_0 \implies |v_n - l| < \varepsilon$$

Pour cet ε

$$\exists n_1 \mid \forall n : n \geq n_1 \implies |u_n - l| < \varepsilon$$

Or

$$\begin{aligned} \forall n : n \geq n_1 &\implies \varphi(n) \geq n \geq n_1 \\ &\implies \varphi(n) \geq n_1 \\ &\implies \left|u_{\varphi(n)} - l\right| < \varepsilon \\ &\implies |v_n - l| < \varepsilon \end{aligned}$$

Il suffira alors de prendre $n_0 = n_1$ *ce qui termine la démonstration.*

Remarque

La contraposée de ce théorème est :

Si une suite $(u_n)_n$ admet une sous suite divergente alors la suite $(u_n)_n$ diverge. Par conséquent pour montrer qu'une suite diverge il suffit de

- montrer qu'elle admet une sous suite qui diverge.
- ou bien de montrer qu'elle admet deux sous suites qui converge vers deux limites distinctes.

Exemple

Montrer que la suite de terme général $u_n = (-1)^n$ diverge.

Soient les deux sous suites de $(u_n)_n$:

$$\begin{array}{lll} (v_n)_n & \text{de terme général} & v_n = u_{2n} = 1 \\ (w_n)_n & \text{de terme général} & w_n = u_{2n+1} = -1 \end{array}$$

On a

$$(v_n)_n \text{ converge vers} 1.$$
$$(w_n)_n \text{ converge vers} - 1$$

Comme

$$1 \neq -1$$

alors

$$(u_n)_n \text{ diverge.}$$

Théorème 4.5.1.2 *Si* $(u_{2n})_n$ *et* $(u_{2n+1})_n$ *convergent vers la même limite* l *alors la suite* $(u_n)_n$ *converge et elle converge vers* l*.*

Théorème 4.5.1.3 *Théorème de Bolzano-Weirstrass*
De toute suite bornée on peut extraire une sous suite convergente.

4.6 Les suites de Cauchy

4.6.1 Définition

Une suite $(u_n)_n$ est **de Cauchy** si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \mid \ \forall p, q \in \mathbb{N} : \quad p \geq q \geq n_0 \implies |u_p - u_q| < \varepsilon.$$

En d'autres termes
Pour chaque

$$\varepsilon > 0$$

on peut trouver un

$$n_0 \in \mathbb{N}$$

tel que pour tout

$$p, q \in \mathbb{N}$$

si

$$p \geq q$$

alors

$$|u_p - u_q| < \varepsilon.$$

Exemple Montrer que la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$est une suite de Cauchy
Soit

$$\varepsilon > 0 \text{on cherche } n_0 \in \mathbb{N} \mid$$

Remarque
Pour montrer qu'une suite est de Cauchy en utilisant la définition on procède par deux méthodes :
Soient

$$\varepsilon > 0 \quad \text{et} \quad p, q \in \mathbb{N} \mid p \geq q$$

Méthode 1 On majore

$$|u_p - u_q|$$

par

$$\|w_p| \quad \text{ou} \quad \|w_q| \quad \text{où} \quad (w_n)_n \text{ est une suite qui converge vers } 0$$

Méthode 2 On majore

$$|u_p - u_q|$$

par

$$|w_p - w_q| \quad \text{où} \quad (w_n)_n \text{ est une suite de Cauchy}$$

Théorème 4.6.1.1 *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Théorème 4.6.1.2 *à admettre*
Soit $(u_n)_n$ une suite numérique réelle.
$(u_n)_n$ converge si et seulement si $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy.

Remarque

1. $(u_n)_n$ diverge si et seulement si $(u_n)_n$ n'est pas une suite de Cauchy.
2. $(u_n)_n$ n'est pas une suite de Cauchy si et seulement si

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \mid \exists p, q \in \mathbb{N} : \quad p \geq q \geq n \quad \text{et} \quad |u_p - u_q| \geq \varepsilon.$$

Exemple Soit

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. Calculer $u_{2n} - u_n$.

$$\begin{aligned} u_{2n} - u_n &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\ &= \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \end{aligned}$$

2. En déduire que $(u_n)_n$ diverge.
On a

$$\left.\begin{array}{ccc} \dfrac{1}{n+1} & \geq & \dfrac{1}{2n} \\ \dfrac{1}{n+2} & \geq & \dfrac{1}{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{1}{n+n} & \geq & \dfrac{1}{2n} \end{array}\right\} \Longrightarrow u_{2n} - u_n \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

Par conséquent

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{2} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \mid \exists p = 2n, q = n \in \mathbb{N} : \quad p \geq q \geq n \quad \text{et} \quad |u_p - u_q| \geq \frac{1}{2}$$

Conclusion : $(u_n)_n$ n'est pas une suite de Cauchy donc elle est divergente.

4.7 Extention aux limites infinies

4.7.1 Définition

- On dit qu'une suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ si et seulement si

$$\forall A > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall n : \quad n \geq n_0 \Longrightarrow u_n > A$$

et on écrit $\lim u_n = +\infty$

- On dit qu'une suite $(u_n)_n$ tend vers $-\infty$ si et seulement si

$$\forall A > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall n : \quad n \geq n_0 \implies u_n < -A$$

et on écrit $\lim u_n = -\infty$

Remarque

1. Le n_0 de la définition précédente n'est pas unique, et il dépend de A..
2. Quand $\lim u_n = +\infty$ ou bien $\lim u_n = -\infty$ on dira que la suite $(u_n)_n$ **diverge** et que c'est une divergence de **première espèce**.
3. Quand une suite $(u_n)_n$ ne converge pas et elle ne diverge pas ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$ alors on dira que $(u_n)_n$ **diverge** et que c'est **une divergence de deuxième espèce**.

Théorème 4.7.1.1 *soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites numériques*

1. *Si $(u_n)_n$ est **croissante non majorée** alors $(u_n)_n$ **est divergente** vers $+\infty$.*
2. *$(u_n)_n$ est **décroissante non minorée** alors $(u_n)_n$ est **divergente** vers $-\infty$.*
3. *Si $\exists n_1 \mid \boldsymbol{u_n \geq v_n}\ \forall n \geq n_1$ et $\boldsymbol{\lim v_n = +\infty}$ alors $\boldsymbol{\lim u_n = +\infty}$.*
4. *Si $\exists n_1 \mid \boldsymbol{u_n \leq v_n}\ \forall n \geq n_1$ et $\boldsymbol{\lim v_n = -\infty}$ alors $\boldsymbol{\lim u_n = -\infty}$.*
5. *Si $\boldsymbol{\lim u_n = +\infty}$ alors **toute sous suite** de $(u_n)_n$ **diverge vers** $+\infty$.*
6. *Si $\boldsymbol{\lim u_n = -\infty}$ alors **toute sous suite** de $(u_n)_n$ **diverge vers** $-\infty$.*

4.7.2 Propriétés

Etant donnée deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$, on a

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim (u_n + v_n)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	indétermination
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$
$l \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$-\infty$

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim (u_n v_n)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$l \neq 0$	$+\infty$	(signe de l) $(+\infty)$
$l \neq 0$	$-\infty$	(signe de l)$(-\infty)$
$l = 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	indétermination

$\lim u_n$	$\lim \frac{1}{u_n}$
$+\infty$	0
$-\infty$	0
$l \neq 0$	$\frac{1}{l}$
$l = 0$ et $u_n > 0$	$+\infty$
$l = 0$ et $u_n < 0$	$-\infty$
$l = 0$ et le signe de u_n change	la limite n'existe pas.

Exercice Étude de la suite géométrique $(u_n)_n$ avec $u_n = a^n$
Montrer que :

1. Si $|a| < 1$ alors $(u_n)_n$ converge vers 0.
2. Si $a > 1$ alors $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$.
3. Si $a < -1$ alors $(u_n)_n$ est divergente de deuxième espèce.
4. Si $a = 1$ alors $(u_n)_n$ converge vers 1.
5. Si $a = -1$ alors $(u_n)_n$ est divergente de deuxième espèce.

Solution :

1. Si $|a| < 1$ montrons $(u_n)_n$ converge vers 0.
   (a) Si $a = 0$ alors $u_n = a^n = 0^n = 0$ converge vers 0.
   (b) Si $a \neq 0$
   Soit $\varepsilon > 0$, on cherche un entier naturel n_0 qui vérifie $\forall n\ (n \geq n_0 \implies |a^n| < \varepsilon)$

$$\text{or} \quad |a^n| < \varepsilon \iff |a|^n < \varepsilon$$
$$\iff n \ln |a| < \ln \varepsilon$$
$$\iff n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |a|} \quad \text{car} \quad \ln a < 0$$

Comme $\mathbb{R}$ est Archimédien alors $\exists n_0$ tel que $n_0 > \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln |a|}$. Ce qui termine la démonstration.

2. Si $a > 1$ Montrons que $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$.
   Soit $A > 0$ on cherche $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n : \quad n \geq n_0 \implies a^n > A$
   $$\begin{aligned} \text{On a} \quad a^n > A &\iff n \ln a > \ln A \\ &\iff n > \frac{\ln A}{\ln a} \quad \text{car } \ln a > 0 \end{aligned}$$
   Comme $\mathbb{R}$ est Archimédien alors $\exists n_0$ tel que $n_0 > \dfrac{\ln A}{\ln a}$.
   Ce qui termine la démonstration. et donc $\lim u_n = +\infty$.
3. Si $a < -1$ montrons que $(u_n)_n$ est divergente de deuxième espèce.
   On a
   $$a^n = (- - a)^n = (-1)^n(-a)^n$$
   Considérons les sous suites d'indices pairs et d'indices impairs de cette suite
   On a
   $$u_{2n} = (-1)^{2n}(-a)^{2n} = (-a)^{2n}$$
   Comme
   $$a < -1$$
   alors
   $$-a > 1$$
   et d'après la question précédente
   $$(-a)^{2n} \text{ diverge vers } + \infty$$
   donc
   $$\lim u_{2n} = +\infty$$
   De même
   $$u_{2n+1} = (-1)^{2n+1}(-a)^{2n} = -(-a)^{2n}$$
   donc
   $$\lim u_{2n+1} = -\infty$$
   Conclusion
   $$\lim u_{2n+1} \neq \lim u_{2n}$$
   par conséquent la suite $(u_n)_n$ diverge et c'est une divergence de deuxième espèce.

4.8 Les suites récurrentes

4.8.1 Définition

Soit une application $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ tell que :

- $D \subset \mathbb{R}$.
- $f(D) \subset D$. (on dira que D est stable par f.)

On appelle **suite récurrente** une suite $(u_n)_{n \geq 0}$, définie par

- **la donnée** de $\boldsymbol{u_0 \in D}$.
- et d**e la relation** suivante : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} \quad \boldsymbol{u_{n+1} = f(u_n)}$

Exemple

1. $\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 + 1 \\ u_0 = 1 \end{cases}$

   La fonction associée à cette suite est $f(x) = 1 + x^2$ et $D = [1, +\infty[$.

2. $\begin{cases} u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n} \\ u_0 > 0 \end{cases}$

   La fonction associée à cette suite est $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ et $D =]0, +\infty[$

Théorème 4.8.1.1 *A admettre*
Soit $(u_n)_n$ une suite récurrente telle qu'elle est donnée par la définition précédente.
Si $(u_n)_n$ converge vers $l \in D$ et f est continue sur D alors l est ***une solution*** *de l'équation $f(x) = x$.*

Remarque

1. Les solutions de l'équation $f(x) = x$ sont appelés **les points fixes de f**.
2. Soit a est un point fixe de f , on a
   Si $\quad u_0 \leq a \quad$ alors $\quad u_n \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Théorème 4.8.1.2 *Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite récurrente et f est l'application qui lui est associée.*
Si f est $\uparrow$ alors $(u_n)_n$ est ***monotone*** *de plus*

- *Si $u_0 \leq u_1$ alors $(u_n)_{n \geq 0}$ est $\uparrow$.*
- *Si $u_0 \geq u_1$ alors $(u_n)_{n \geq 0}$ est $\downarrow$.*

Démonstration 4.8.1.1 *On suppose que*

$$u_0 \leq u_1$$

et on montre que

$$(u_n)_{n \geq 0} \text{ est croissante}$$

Faisons le par récurrence sur n :
Hypothèse de récurrence

$$\text{pour } n = 0 \quad \text{on a} \quad u_0 \leq u_1$$

Supposons que

$$u_n \leq u_{n+1}$$

Montrons que

$$u_{n+1} \leq u_{n+2}$$

On a

$$\begin{aligned} u_n \leq u_{n+1} &\Longrightarrow f\left(u_n\right) \leq f\left(u_{n+1}\right) \quad \textit{car } f \uparrow \\ &\Longrightarrow u_{n+1} \leq u_{n+2} \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve.
Même travail si $u_0 \geq u_1$.

Théorème 4.8.1.3 *Soit $(u_n)_n$ une suite récurrente et f est l'application qui lui est associée.*

Si f est $\downarrow$ alors $(u_n)_n$ ***n'est pas monotone*** *de plus $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones de variation contraire.*

En d'autres termes :

- *Si $u_0 \leq u_2$ alors $(u_{2n})_n$ est $\uparrow$ et $(u_{2n+1})_n$ $\downarrow$.*
- *Si $u_0 \geq u_2$ alors $(u_{2n})_n$ est $\downarrow$ et $(u_{2n+1})_n$ $\uparrow$.*

Démonstration 4.8.1.2 *Si $u_0 \leq u_1$ alors $u_0 \leq u_1 \Longrightarrow u_1 \geq u_2 \Longrightarrow u_2 \leq u_3 ...$*
On voit bien que $(u_n)_n$ n'est ni croissante ni décroissante.
Posons :

$$\begin{aligned} v_n &= u_{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ w_n &= u_{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

On remarque que

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f\left(f(u_{2n})\right) = f \circ f\left(u_{2n}\right) == f \circ f\left(v_n\right) \\ w_{n+1} &= u_{2(n+1)+1} = u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f\left(f(u_{2n+1})\right) = f \circ f\left(u_{2n+1}\right) = f \circ f\left(w_n\right) \end{aligned}$$

donc (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont deux suites récurrentes et la fonction qui leur est associée est $f \circ f$.
Comme f est décroissante alors $f \circ f$ est croissante , par conséquent :

$$\begin{aligned} u_0 \leq u_2 &\Longrightarrow \begin{cases} u_1 \geq u_3 \\ (u_{2n}) \textit{ est } \uparrow \end{cases} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} (u_{2n+1}) \textit{ est } \downarrow \\ (u_{2n}) \textit{ est } \uparrow \end{cases} \end{aligned}$$

Même chose pour $u_0 \geq u_2$.

Exemple

Etudier la nature des suites récurrentes suivantes :

1. $\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 + 1 \\ u_0 = 1 \end{cases}$
   (a) Montrer que $\forall n, u_n \geq 1$.
   On le fait par récurrence sur n.

(b) Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\geq 0}$.
Comme $\forall n, u_n \geq 1$ alors on va considérer la fonction associée à la suite $(u_n)_n$ comme étant

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 1 \\ x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

Étudions le sens de variation de f sur D :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$2 \nearrow$	$+\infty$

On a

$$f'(x) = 2x > 0 \quad \forall x \in D$$

par conséquent

$$f \text{ est croissante sur } D$$

donc la suite

$$(u_n)_n \text{ est monotone}$$

Etude du signe de $u_1 - u_0$:

$$u_0 = 1 \implies u_1 = 2$$

donc

$$u_1 - u_0 = 2 - 1 = 1 > 0$$

par conséquent

$$(u_n)_n \text{ est } \uparrow$$

On sait que si $(u_n)_n$ est majorée alors elle converge et elle converge vers un point fixe de f
et si $(u_n)_n$ n'est pas majorée alors elle diverge vers $+\infty$.

(c) Calculer les points fixes de $f(x) = 1 + x^2$ avec $x \in D = [1, +\infty[$ puis en déduire la nature de $(u_n)_n$
Résolvons l'équation $f(x) = x$ dans D :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff 1 + x^2 = x \\ &\iff x^2 - x + 1 = 0 \end{aligned}$$

Or l'équation $x^2 - x + 1 = 0$ n'admet pas de solution réelles, donc f n'admet pas de points fixes dans D
Conclusion la suite diverge vers $+\infty$.

2. $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3} \\ u_0 \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$

Comme $\forall n, u_n \geq 0$ alors on va considérer la fonction associée à la suite $(u_n)_n$ comme étant

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{2x + 3} \\ x \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

(a) **Étudions le sens de variation** de f sur $\mathbb{R}^+$:
On a
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

On a
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$
par conséquent
$$f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+$$
donc la suite
$$(u_n)_n \text{ est monotone}$$

(b) **Etude du signe** de $u_1 - u_0$:
Comme on ne connait pas la valeur de u_0 alors pour déterminer le signe de
$$u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0$$
On va étudier le signe de
$$f(x) - x$$

$$\begin{aligned} f(x) - x = 0 &\iff \quad \sqrt{2x+3} - x = 0 \\ &\iff \frac{-x^2 + 2x + 3}{x + \sqrt{2x+3}} = 0 \\ &\iff \frac{(x+1)(-x+3)}{x + \sqrt{2x+3}} = 0 \end{aligned}$$

x	0		3		$+\infty$
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	

donc $\quad \lambda = 3 \quad$ est le seul point fixe de la fonction $f \circ f$.

i. Si $u_0 \in [0,3]$: On a
$$\begin{aligned} u_0 \in [0,3] &\implies f(u_0) - u_0 \geq 0 \\ &\implies u_1 - u_0 \geq 0 \\ &\implies (u_n)_{n\geq 0} \text{ est } \uparrow \end{aligned}$$

On a aussi
$$\begin{aligned} u_0 \in [0,3] &\implies u_0 \leq 3 \\ &\implies u_n \leq 3 \quad \forall n \geq 0 \quad \text{car 3 est un point fixe de } f \text{ et } f \text{ est } \uparrow \end{aligned}$$

Conclusion : $(u_n)_n$ est croissante majorée donc elle est convergente et comme le seul point fixe de f est 3 alors $(u_n)_n$ converge vers 3.

ii. Si $u_0 \in]3,+\infty[$:

$$\begin{aligned} u_0 \in]3,+\infty[&\Longrightarrow f(u_0) - u_0 < 0 \\ &\Longrightarrow u_1 - u_0 < 0 \\ &\Longrightarrow (u_n)_{n\geq 0} \text{ est } \downarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_0 \in]3,+\infty[&\Longrightarrow u_0 > 3 \\ &\Longrightarrow u_n > 3 \quad \forall n \geq 0 \quad \text{car3est un point fixe de } f et f \text{est } \uparrow \end{aligned}$$

Conclusion : $(u_n)_n$ est décroissante minorée donc elle est convergente et comme le seul point fixe de f est 3 alors $(u_n)_n$ converge vers 3.

3. $\begin{cases} u_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{u_n} \\ u_0 = 1 \end{cases}$

Comme $\forall n, u_n \geq 1$ alors on va considérer la fonction associée à la suite $(u_n)_n$ comme étant

$$\begin{cases} f(x) = 1 + \dfrac{2}{x} \\ x \in [1,+\infty[= D \end{cases}$$

(a) **Étudions le sens de variation** de f sur D :
On a

$$f'(x) = \frac{-2}{x^2}$$

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	3 $\searrow$ 1

Sur $[1,+\infty[$,f est décroissante par conséquent $(u_n)_{n\geq 0}$ n'est pas monotone, mais $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont monotones.

(b) **Calcul des points fixes de** $f \circ f$ dans $[1,+\infty[$:

$$\begin{aligned} f \circ f\,(x) = x &\Longleftrightarrow f \circ f\,(x) - x = 0 \\ &\Longleftrightarrow 1 + \frac{2}{f(x)} - x = 0 \\ &\Longleftrightarrow \frac{-x^2 + x + 2}{x + 2} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \frac{(x+1)(-x+2)}{x+2} = 0 \end{aligned}$$

Donc $\lambda = 2$ est le seul point fixe de $f \circ f$ dans $[1,+\infty[$.

(c) **Nature des deux sous suites :**

<u>Méthode 1</u> :

Comme les sous suites $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont monotones et appartiennent à l'intervalle $[1,3]$ donc elles sont bornées par conséquent elles sont convergentes.
Le seul points fixe de $f\circ f$ étant $\lambda = 2$ alors $\lim u_{2n} = \lim u_{2n+1} = 2$ donc $\lim u_n = 2$.

<u>Méthode 2</u>

i. **Etude des variation de** $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$: On a

$$u_0 = 1 \implies u_1 = 3 \implies u_2 = \frac{5}{3}$$

donc

$$u_0 < u_2$$

Par suite

$$(u_{2n})_{n\geq 0} \text{ est croissante et } (u_{2n+1})_{n\geq 0} \text{ est décroissante}$$

ii. **Nature d**e $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$:
Cette sous suite est décroissante minorée par 1 donc elle est convergente , et elle converge vers un point fixe de $f\circ f$.
Comme le seul point fixe de $f\circ f$ est 2 alors $\lim u_{2n+1} = 2$.

iii. **Nature de** $(u_{2n})_{n\geq 0}$:
Cette sous suite est croissante, montrons qu'elle est majorée :
On a

$$u_0 = 1 < 2 \implies u_{2n} < 2$$

Donc cette sous suite est convergente vers le seul point fixe de $f\circ f$ qui est 2 donc $\lim u_{2n} = 2$

<u>Conclusion :</u>

$$\lim u_{2n} = 2 = \lim u_{2n+1} \text{ alors } \lim u_n = 2.$$

4. $$\begin{cases} u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n} \\ u_0 > 0 \end{cases}$$

Comme $\forall n, u_n > 0$ alors on va considérer la fonction associée à la suite $(u_n)_n$ comme étant

$$\begin{cases} f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} \\ x \in]0,+\infty[\end{cases}$$

(a) **Étudions le sens de variation** de f sur $D =]0,+\infty[$:
On a

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	1

Sur D, f est décroissante par conséquent $(u_n)_{n\geq 0}$ n'est pas monotone, mais $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont monotones.

(b) **Calcul des points fixes de $f \circ f$** dans $[1, +\infty[$:

$$\begin{aligned} f \circ f\,(x) = x &\iff f \circ f\,(x) - x = 0 \\ &\iff 1 + \frac{1}{f(x)} - x = 0 \\ &\iff \frac{-x^2 + x + 1}{x + 1} = 0 \end{aligned}$$

Les racines de

$$-x^2 + x + 1$$

sont

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \notin D \text{ et } x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \in D$$

donc un seul point fixe dans D

$$\lambda = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

(c) **Etude des variations des deux sous suites** :
Pour étudier le signe de

$$u_2 - u_0$$

Il suffira d'étudier le signe de $f \circ f\,(x) - x$:

x	$0 \qquad \lambda \qquad +\infty$
$f \circ f(x) - x$	$+ \quad 0 \quad -$

i. Si $u_0 \in]0, \lambda]$

$$u_0 \in]0, \lambda] \implies u_2 - u_0 = f(f(u_0)) - u_0 \geq 0$$

par conséquent

$$(u_{2n}) \text{ est } \uparrow \text{et} \quad (u_{2n+1}) \text{ est } \downarrow$$

de plus

$$u_0 \leq \lambda \implies u_{2n} \leq \lambda \text{ car } \lambda \text{ est un point fixe de } \; f \circ f$$

Donc (u_{2n}) est majorée alors elle converge vers λ car c'est le seul point fixe de $f \circ f$.
On a aussi (u_{2n+1}) est minorée par 1 donc elle est convergente vers λ.
Conclusion : (u_n) converge vers λ.

ii. Si $u_0 > \lambda$:

$$u_0 > \lambda \implies u_2 - u_0 == f(f(u_0)) - u_0 < 0$$

par conséquent

$$(u_{2n}) \text{ est } \downarrow \text{et} \quad (u_{2n+1}) \text{ est } \uparrow$$

$$u_0 > \lambda \implies u_{2n} \leq \lambda$$

$$u_0 > \lambda \implies u_1 < f(\lambda) = \lambda \implies u_{2n+1} < \lambda$$

$f(\lambda) = \lambda$ car

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= 1 + \frac{1}{\lambda} \\ &= 1 + \frac{2}{1+\sqrt{5}} \\ &= 1 + \frac{2\left(1+\sqrt{5}\right)}{-4} \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right) \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ &= \lambda \end{aligned}$$

Donc (u_{2n+1}) est majorée alors elle converge vers λ car c'est le seul point fixe de $f \circ f$.
On a aussi (u_{2n}) est minorée par 0 donc elle est convergente vers λ.
Conclusion : (u_n) converge vers λ.

Remarque : Dans le ii) de cet exemple, si on avait calculé les points fixes de f sur D on aurait trouvé que $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est un point fixe de f sur D, ce qui nous aurait évité le calcul de $f(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$.