CHAPITRE 2

CORPS DES NOMBRES COMPLEXES

Définition 2.1 (Corps des nombres complexes)**.** On appelle corps des nombres complexes, et on le note $\mathbb{C}$, l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des deux lois internes $\oplus$ et $\otimes$ définies de la façon suivante. Pour tous couples (x, y), (x', y') de $\mathbb{R}^2$, on pose

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y'),$$

$$(x, y) \otimes (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y).$$

Pour simplifier les écritures, on note $+$ et $\times$ (ou $\cdot$) les lois de composition interne $\oplus$ et $\otimes$. Pour tout nombre réel x, on identifie le nombre complexe $(x, 0)$ avec le réel x. On note i le nombre complexe $(0, 1)$. En appliquant cette convention et en utilisant la définition de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{C}$, on peut écrire pour tout nombre complexe (x, y),

$$(x, y) = x + iy.$$

En effet,

$$(x, y) = (x, 0) + y(0, 1) = x + iy.$$

La formule du produit donne

$$i^2 = (0, 1) \times (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Si $z = x + iy$ un nombre complexe, sa **partie réelle** est le réel x et on la note $Re(z)$, sa **partie imaginaire** est le réel y et on la note $Im(z)$.

2.1 Opérations algébriques sur les nombres complexes

Avec les conventions d'écriture précédentes, l'addition et la multiplication définies sur $\mathbb{R}^2$, deviennent pour tous complexes $x + iy, x' + iy'$:

$$(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y'),$$

$$(x + iy) \times (x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y).$$

2.1.1 Propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{C}$

Proposition 2.1

L'addition dans $\mathbb{C}$

1. est **associative** : $\forall z, z', z'' \in \mathbb{C} \quad (z+z')+z'' = z+(z'+z'')$,
2. est **commutative** : $\forall z, z' \in \mathbb{C} \quad z+z' = z'+z$,
3. possède un **élément neutre** 0 : $\forall z \in \mathbb{C} \quad z+0 = z$,
4. de plus, tout nombre complexe $z = x+iy$ possède un **opposé**, $-z = -x-iy$.
   On résume ces quatre propriétés en disant que $(\mathbb{C}, +)$ est un **groupe commutatif**.

Proposition 2.2

La multiplication $\mathbb{C}$

1. est **associative** : $\forall z, z', z'' \in \mathbb{C} \quad (z \times z') \times z'' = z \times (z' \times z'')$,
2. est **commutative** : $\forall z, z' \in \mathbb{C} \quad z \times z' = z' \times z$,
3. possède un **élément neutre** 1 : $\forall z \in \mathbb{C} \quad z \times 1 = z$,
4. de plus, tout nombre complexe non nul $z = x+iy$ possède un **inverse**, z^{-1} donné par
$$z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}.$$
   On résume ces quatre propriétés en disant que $(\mathbb{C}^*, +)$ est un **groupe commutatif**.

2.1.2 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 2.2. Soit $z = x+iy$ un nombre complexe. On appelle **conjugué** de z que l'on note $\overline{z}$ le nombre complexe défini par $\overline{z} = x - iy$.

Proposition 2.3

Pour tous complexe z, z', on a :

1. $Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}, Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}, \overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
3. $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}, z' \neq 0$
4. $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

2.1.3 Module d'un nombre complexe

Définition 2.3. Le module de $z = x+iy$ est le réel positif $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Comme $z \times \overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2$, alors le module vaut aussi $|z| = \sqrt{z \times \overline{z}}$.

Proposition 2.4

Pour tous complexe z, z', on a :

1. $|z|^2 = z \times \overline{z}, |\overline{z}| = |z|, |z \times z'| = |z| \times |z'|, |\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}, z' \neq 0$

2. $|z| = 0 \iff z = 0$
3. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$, (l'inégalité triangulaire)

2.1.4 Représentation géométrique d'un nombre complexe

Le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, se nomme **plan complexe**.
A tout nombre complexe z d'écriture algébrique $z = x + iy$ correspond un unique point M du plan de coordonnées (x, y).

- On dit z est **l'affixe** de M et on note $M(z)$.
- On dit que M est **l'image** ponctuelle de z.

A tout nombre complexe z d'écriture algébrique $z = x + iy$ correspond un unique vecteur $\vec{V}$ du plan de coordonnées (x, y).
Si z est l'affixe de M alors, $\vec{V} = \overrightarrow{OM}$.

- On dit z est **l'affixe** de $\vec{V}$ et on note $\vec{V}(z)$.
- On dit que $\vec{V}$ est **l'image** vectorielle de z.

Remarque 2.1.
- L'axe des abscisses $(O, \vec{i})$ est l'ensemble des images ponctuelles des nombres réels. On le nomme **l'axe réel**.
- L'axe des ordonnées $(O, \vec{j})$ est l'ensemble des images ponctuelles des imaginaires purs. On le nomme **l'axe imaginaire**.

2.2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

2.2.1 Argument d'un nombre complexe

Proposition 2.5

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul, il existe au moins un réel θ tel que

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{|z|}, \\ \sin(\theta) = \frac{y}{|z|}. \end{cases}$$

Le nombre θ est appelé **un argument** de z et noté $\theta = \arg(z)$.

Cet argument est défini modulo 2π. On peut imposer à cet argument d'être unique si on rajoute la condition $\theta \in]-\pi, +\pi]$.
L'écriture $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ s'appelle la forme **trigonométrique** de z.

Proposition 2.6

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. On a :

1. $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')(\mod 2\pi)$
2. $\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z')(\mod 2\pi)$
3. $\overline{z} = \arg(\frac{1}{z}) = -arg(z)(\mod 2\pi)$
4. $\arg(z^n) = n\arg(z)(\mod 2\pi), \forall n \in \mathbb{Z}$

2.3 Formules d'Euler

Définition 2.4. Pour tout réel θ, nous appellerons **exponentielle imaginaire** de θ et nous noterons $e^{i\theta}$ le nombre complexe défini par

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Nous définissons la notation exponentielle par

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta),$$

et donc tout nombre complexe z s'écrit

$$z = re^{i\theta},$$

où $r = |z|$ est le module de z et $\theta = \arg(z)$ est un argument de z.

Proposition 2.7

Pour tout réel θ, θ', on a

1. $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
2. $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}} = \overline{e^{i\theta}}$
3. $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \theta' + 2k\pi$

Formules d'Euler

Théorème 2.1

Pour tout réel θ, on a

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \ \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

2.4 Racine n-ième d'un nombre complexe

Définition 2.5. Pour $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, une racine n-ième de z est un nombre complexe w tel que

$$w^n = z.$$

Proposition 2.8

Pour tous $z \in \mathbb{C}$, il y a n racine n-ième.
Si $z = re^{i\theta}$, alors les n racine n-ième sont :

$$w_k = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, k = 0, 1, ..., n-1.$$