Chapitre 1

La droite réelle

Introduction

Dans ce chapitre on ne procédera pas à la construction de $\mathbb{R}$, on supposera les propriétés de $\mathbb{R}$ connues, toute fois on rappellera quelques unes.

3.1 Rappels

3.1.1 Notations

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$ est appelé **l'ensemble des entiers naturels**.

$\mathbb{Z} = \{\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$ est appelé **l'ensemble des entiers relatifs.**

$\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{m}{n} \quad \text{tels que} \quad m \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{Z}^*\right\}$ est appelé **l'ensemble des nombres rationnels.**

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{irrationnels \cdots\}$ est appelé **l'ensemble des nombres réels**.

3.1.2 Rappel : L'ordre sur la droite réelle

Dans $\mathbb{R}$ sont définies deux opérations ordinaires appelées **l'addition** et **la multiplication** et une relation d'ordre appelée **inférieur ou égale** et notée $\leq$.

Notation

$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$
$\mathbb{R}_*^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $\mathbb{R}_*^- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

Propriétés

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad x \leq y \quad \text{ou} \quad y \leq x$
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : \quad x \leq y \iff x + z \leq y + z$
3. $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall z \in \mathbb{R}_*^+ : \quad x \leq y \iff xz \leq yz$
4. $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall z \in \mathbb{R}_*^- : \quad x \leq y \iff xz \geq yz$
5. $\forall x, y \in \mathbb{R}^\star \quad xy > 0 : \quad x \leq y \iff \dfrac{1}{x} \geq \dfrac{1}{y}$
6. $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad y > 0 : \quad x \leq y \iff \dfrac{x}{y} \leq 1$
7. $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad y < 0 : \quad x \leq y \iff \dfrac{x}{y} \geq 1$

8. $\forall x, y, x', y' \in \mathbb{R}$:
$$\begin{cases} x \leq y \\ x' \leq y' \end{cases} \Longrightarrow x + x' \leq y + y'$$

Remarque Attention les erreurs suivantes sont très répandues chez les étudiants :

1. $\begin{cases} x \leq y \\ x' \leq y' \end{cases} \Longrightarrow x - x' \leq y - y'$ **ce qui est faux.**
2. $\begin{cases} x \leq y \\ x' \leq y' \end{cases} \Longrightarrow x\, x' \leq y\, y'$ **ce qui est faux.**
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}^\star : x \leq y \iff \dfrac{1}{x} \geq \dfrac{1}{y}$ **ce qui est faux.**

3.2 La valeur absolue

3.2.1 Définition

On appelle **valeur absolue** d'un réel x notée $|\boldsymbol{x}|$ le nombre réel suivant :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

3.2.2 Propriétés

1. $\forall x \in \mathbb{R} : \quad |x| = 0 \iff x = 0$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad |x\, y| = |x|\, |y|$
3. $\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad |x + y| \leq |x| + |y|$
4. $\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad |x - y| \geq \big||x| - |y|\big|$
5. $\forall x \in \mathbb{R} : \quad \sqrt{x^2} = |x|$
6. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{R}^+ : \quad |x| \leq a \iff -a \leq x \leq a.$
7. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{R}^+ : \quad |x| \geq a \iff x \geq a$ ou $x \leq -a.$

3.3 Borne supérieure et borne inférieure

3.3.1 Définition d'un majorant, d'un minorant

Soit E une partie **non vide** de $\mathbb{R}$

1. Un élément $\underline{\boldsymbol{M} \text{ de } \mathbb{R}}$ est un **majorant** de $\underline{\boldsymbol{E}}$ si et ssi $\boldsymbol{\forall x \in E : \quad x \leq M}$.
2. Un élément $\underline{\boldsymbol{m} \text{ de } \mathbb{R}}$ est dit **minorant** de $\underline{\boldsymbol{E}}$ si et ssi $\boldsymbol{\forall x \in E : \quad x \geq m}$.

3.3.2 Définition d'une partie majorée, minorée

Soit E une partie **non vide** de $\mathbb{R}$

1. E est **majorée** si et seulement si E **admet un majorant**.
2. E est **minorée** si et seulement si E admet **un minorant**.
3. E est **bornée** si et seulement si E admet **minorée et** E **est majorée**.

Exemple

1. $E_1 = \{1, 2, 3\}$
   - 3 est un majorant de E_1 car $\forall x \in E_1 \quad x \leq 3$.
   - 5 est aussi un majorant de E_1 car $\forall x \in E_1 \quad x \leq 5$.
   - 1 est un minorant de E_1 car $\forall x \in E_1 \quad x \geq 1$. ($0$ est un autre minorant).
2. $E_2 = [0, 2[$
   - 2 est un majorant de E_2 car $\forall x \in E_2 \quad x \leq 2$.
   - 0 est un minorant de E_2 car $\forall x \in E_2 \quad x \geq 0$.
3. $E_3 =]0, +\infty[$
   - E_3 n'admet pas de majorant.
   - 0 est un minorant de E_3 car $\forall x \in E_3 : \quad x \geq 0$.
4. $E_4 = \{\cos x \mid x \in \mathbb{R}\}$
   - 1 est un majorant de E_4 car $\forall x \in E_4 \quad \cos x \leq 1$.
   - -1 est un minorant de E_4 car $\forall x \in E_4 \quad \cos x \geq -1$.

Remarque

1. Si M majore E alors $\forall M' \geq M, M'$ majore E.
2. Si m minore E alors $\forall m' \leq m, m'$ minore E.
3. E est borné $\iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in E \quad \alpha \leq x \leq \beta$.
4. On démontre que E est borné $\iff \exists \gamma \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in E \quad |x| \leq \gamma$.

3.3.3 Minimum et maximum d'un ensemble

Soit E une partie **non vide** de $\mathbb{R}$

1. Un réel M est dit **maximum** de E, noté $\mathbf{max}\, \boldsymbol{E}$ si et ssi $\boldsymbol{M}$ est un majorant de $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{M} \in \boldsymbol{E}$.
2. Un réel $\boldsymbol{m}$ est dit **minimum** de $\boldsymbol{E}$ noté $\mathbf{min}\, \boldsymbol{E}$ si et ssi $\boldsymbol{m}$ est un minorant de $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{E}$.

Remarque

1. On dira que $\max E$ est le plus grand élément de E, quand il existe il est unique.
2. On dira que $\min E$ est le plus petit élément de E, quand il existe il est unique.

Exemple Reprenons les exemples précédents et notons par $M(E)$ l'ensemble des majorants de E et notons par $m(E)$ l'ensemble des minorants de E.

1. - $\min E_1 = 1$ car 1 minore E_1 et $1 \in E_1$.
   - $\max E_1 = 3$ car 3 majore E_1 et $3 \in E_1$.
2. - $\min E_2 = 0$ car 0 minore E_2 et $0 \in E_2$.
   - $\max E_2$ n'existe pas car il est évident que $M(E_2) = [2, +\infty[$ par conséquent E_2 n'admet pas un majorant qui lui appartient.
3. - $\max E_3$ n'existe pas car E_3 n'est pas majoré.
   - $\min E_3$ n'existe pas car il est évident que $m(E_3) =]-\infty, 0]$ par conséquent E_3 n'admet pas un minorant qui lui appartient.
4. - $\max E_4 = 1$ car 1 majore E_4 et $1 = \cos 2\pi \in E_4$
   - $\min E_4 = -1$ car -1 minore E_4 et $-1 = \cos \pi \in E_4$.

Remarque

1. $\min E, \max E \in E$ (quand ils existent).
2. $\min E$ et $\max E$ peuvent ne pas exister.
3. Tout sous ensemble non vide et majoré (dans $\mathbb{R}$) de $\mathbb{N}$ admet un maximum et un minimum.
4. Tout sous ensemble non vide et majoré (dans $\mathbb{R}$) de $\mathbb{Z}$ admet un maximum .
5. Tout sous ensemble non vide et minoré (dans $\mathbb{R}$) de $\mathbb{Z}$ admet un minimum.

On a vu dans une remarque précédente qu'à partir d'un majorant M, on peut construire une infinité de majorants supérieurs ou égal à M. Ce qui nous mène à chercher ,s'il existe, le plus petit de ces majorants.
De la même façon, à partir d'un minorant m, on peut construire une infinité de minorants inférieurs ou égal à m. Ce qui nous mène à chercher ,s'il existe, le plus petit grand de ces majorants.
Et c'est le but de la section suivante :

3.3.4 Borne supérieure et Borne inférieure

Borne supérieure

Définition Soit E une partie **non vide** et **majorée** de $\mathbb{R}$.
La borne supérieure de E, notée **sup *E***, est le plus petit des majorants de E.
Autrement dit :

$$M = \sup E \iff \begin{cases} M \text{ majore } E \\ \forall M' \in \mathbb{R} \quad (M' \quad \text{majore} \quad E \implies M \leq M') \end{cases}$$

Borne inférieure

Définition Soit E une partie **non vide** et **minorée** de $\mathbb{R}$.
La borne inférieure de E est le plus grand des minorants de A. on le note **inf** $\boldsymbol{E}$.
Autrement dit :

$$m = \inf E \iff \begin{cases} m \text{ minore } E \\ \forall m' \in \mathbb{R} \quad (m' \quad \text{minore} \quad E \implies m' \leq m) \end{cases}$$

Axiome de la borne supérieure

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Axiome de la borne inférieure

Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Exemple Reprenons les exemples précédents

1. $E_1 = \{1, 2, 3\}$
   - $M(E_1) = [3, +\infty[$ donc $\sup E_1 = 3$.
   - $m(E_1) =]-\infty, 1]$ donc $\inf E_1 = 1$.
2. $E_2 = [0, 2[$
   - $M(E_2) = [2, +\infty[$ donc $\sup E_2 = 2$.
   - $m(E_2) =]-\infty, 0]$ donc $\inf E_2 = 0$.
3. $E_3 =]0, +\infty[$
   - E_3 n'étant pas majorée alors sa borne supérieure n'existe pas.
   - $m(E_3) =]-\infty, 0]$ donc $\inf E_3 = 0$.

Remarque

$\sup E$ et $\inf E$ **sont deux éléments de** $\mathbb{R}$ **ils peuvent ne pas appartenir à** E.
La question que l'on se pose est la suivante :
Quel est le rapport entre $\sup E$ et $maxE$?
Quel est le rapport entre $infE$ et $minE$?
La réponse est dans la proposition suivante :

Proposition Soit E une partie **non vide** et **majorée** de $\mathbb{R}$.

1. Si $\max E$ existe alors $\sup E = \max E$.
2. Si $\sup E \in E$ alors $\max E$ existe de plus $\max E = \sup E$.

Proposition Soit E une partie **non vide** et **minorée** de $\mathbb{R}$.

1. Si $minE$ existe alors $\inf E = \min E$.
2. Si $\inf E \in E$ alors $\min E$ existe de plus $\min E = \inf E$.

Exemple

1. $E_4 = \{\cos x \mid x \in \mathbb{R}\}$
   - On a vu que $\max E_4 = 1$ par conséquent $\sup E_4 = 1$
   - $\min E_4 = -1$ par conséquent $\inf E_4 = -1$
2. $E_2 = [0, 2[$ on a vu que $\sup E_2 = 2$ et comme $2 \notin E_2$ alors $\max E_2$ n'existe pas.

Caractérisation de la Borne supérieure

Proposition
soient
- A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.
- $M \in \mathbb{R}$.

$$M = \sup A \iff \begin{cases} M \text{ majore } A \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \ \mid \ M - \varepsilon < x \leq M \end{cases}$$

Caractérisation de la Borne inférieure

Proposition
soient
- A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$.
- $m \in \mathbb{R}$.

$$m = \inf A \iff \begin{cases} m \text{ minore } A \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \ \mid \ m \leq x < m + \varepsilon \end{cases}$$

Exemple Trouver dans chacun des cas suivants le maximum, le minimum, la borne supérieure et la borne inférieure s'ils existent.

1. $E_5 = \left\{ \frac{1}{n} \quad \backslash \quad n \in \mathbb{N}^* \right\}$
2. $E_6 = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \quad \backslash \quad n \in \mathbb{N}^* \right\}$

3.4 Quelques compléments sur $\mathbb{R}$

3.4.1 La propriété d'Archimède

Théorème 3.4.1.1

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \textit{tel que } x < n$$

*On dira que $\mathbb{R}$ est **Archimédien***

Démonstration 3.4.1.1 *On veut montrer que*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \textit{tel que } x < n$$

Pour cela faisons un raisonnement par l'absurde :
Supposons que

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} \quad \textit{tel que} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x_0 \geq n$$

or

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N} \quad n \leq x_0 &\Longrightarrow \mathbb{N} \quad \textit{majoré} \\
&\Longrightarrow \sup \mathbb{N} \quad \textit{existe} \\
&\Longrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \backslash \sup \mathbb{N} = \alpha \\
&\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \textit{tel que} \quad \alpha - \varepsilon < n \leq \alpha \\
&\Longrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \quad \alpha - 1 < n \leq \alpha \quad (\textit{cas particulier } \varepsilon = 1) \\
&\Longrightarrow \alpha < n + 1
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{cases} \alpha \quad \textit{majore} \quad \mathbb{N} \\ \textit{et} \\ n+1 \in \mathbb{N} \end{cases} \Longrightarrow n + 1 \leq \alpha.$$

En conclusion :

$$\alpha < n + 1 \quad \textit{et} \quad n + 1 \leq \alpha$$

ce qui est absurde. Par conséquent la supposition faite est fausse ce qui termine la démonstration.

Remarque Le principe d'Archimède signifie que $\mathbb{N}$ n'est pas majoré.

3.4.2 La densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad (x < y \Longrightarrow \exists z \in \mathbb{Q} \quad \text{tel que } x < z < y)$$

On dira que $\mathbb{Q}$ **est dense dans** $\mathbb{R}$.

Démonstration 3.4.2.1 *Soient $x, y \in \mathbb{R}$ telsque $x < y$*
Montrons que $\exists z \in \mathbb{Q}$ telque $x < z < y$
Cherchons z sous forme suivante : $z = \dfrac{q}{p}$ $\quad q \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}^*$
Considérons

$$\frac{1}{y - x}$$

$\mathbb{R}$ étant Archimédien alors

$$\exists p \in \mathbb{N}^* \quad \textit{telque} \quad p > \frac{1}{y - x}$$

On a

$$\begin{aligned}
p > \frac{1}{y - x} &\Longrightarrow py - px > 1 \\
&\Longrightarrow py > px + 1
\end{aligned}$$

Considérons

$$B = \{n \in \mathbb{Z} \mid n > px\}$$

On a
$$\begin{cases} B \subset \mathbb{Z} \\ B \neq \emptyset \quad car \quad \mathbb{R} \quad est\ Archimédien \end{cases} \Longrightarrow minB \quad existe$$
Posons

$$minB = q \in \mathbb{Z}$$

On a

$$\begin{aligned} minB = q &\Longrightarrow q - 1 \notin B \\ &\Longrightarrow q - 1 \leq px \\ &\Longrightarrow q \leq 1 + px \\ &\Longrightarrow px < q \leq 1 + px < py \\ &\Longrightarrow px < q < py \\ &\Longrightarrow x < \frac{q}{p} < y \quad (car\ p > 0) \end{aligned}$$

par conséquent on a trouvé le nombre rationnel $\frac{q}{p}$*, ce qui termine la démonstration.*

3.4.3 La partie entière

Théorème 3.4.3.1

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists! n \in \mathbb{Z} \quad tel\ que\ n \leq x < n + 1$$

Cet entier naturel qui existe et qui est unique est appelé ***Partie entière de*** x *on le note* $\boldsymbol{E(x)}$ *ou bien* $[\boldsymbol{x}]$.

Démonstration 3.4.3.1 *Soit* $x \in \mathbb{R}$*, dans une première étape montrons qu'il existe* $n \in \mathbb{Z}$ *tel que* $n \leq x < n + 1$ *:*

- *si* $x \in \mathbb{Z}$ *:*

  $$on\ choisira\ n = x\ car\ on\ a\ bien\ x \leq x < x + 1.$$

- *si* $x \notin \mathbb{Z}$ *et* $x > 0$ *:*
  Posons

  $$A = \{m \in \mathbb{N} \mid m < x\}$$

  On a
  $$\begin{cases} A \subset \mathbb{N} \\ A \neq \emptyset\ car\ \text{A contient 0} \\ A\ est\ majoré \end{cases} \Longrightarrow \max A\ existe$$
  Posons

  $$\max A = n$$

  vérifions que :

  $$n < x < n + 1$$

  $$n < x$$

  est une évidence car $n \in A$

  Montrons que $x < n + 1$ *:*

Par l'absurde supposons que

$$n+1 \leq x$$

On a

$$n+1 \leq x \implies n+1 \in A \implies n+1 \leq n$$

ce qui est absurde.Par conséquent la supposition qu'on a faite est fausse. d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \, \exists n \in \mathbb{N} \quad telque \quad n < x < n+1$$

- *si* $x \notin \mathbb{Z}$ *et* $x < 0$ *:*

$$\begin{aligned} x < 0 &\implies -x > 0 \\ &\implies \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n < -x < n+1 \text{ (d'après le cas précédent)} \\ &\implies \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } -n > \quad x > -n-1 \\ &\implies \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } -n-1 < \quad x < -n \\ &\implies \exists m = -n-1 \in \mathbb{Z} \text{ tel que } m < \quad x < m+1 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{Z} \quad \text{tel que} \quad n \leq x < n+1$$

En deuxième étape montrons l'unicité de n *: Soit* $x \in \mathbb{R}$

Par l'absurde supposons $\exists n' \in \mathbb{Z}$ *telque*

$$n \neq n' \quad et \quad n \leq x < n+1 \quad et \quad n' \leq x < n'+1$$

Or

$$n \neq n' \iff n < n' \quad ou \quad n > n'$$

1. *Si* $n < n'$
   On a

   $$n < n' \implies n \leq n'-1 \implies n+1 \leq n'$$

   or

   $$n \leq x < n+1 \quad et \quad n+1 \leq n' \implies x < n'$$

   donc

   $$x < n' \quad et \quad n' \leq x$$

   ce qui est absurde.
2. *Si* $n' < n$

   $$n' < n \implies n' \leq n-1 \implies n'+1 \leq n$$

   or

   $$n'+1 \leq n \quad et \quad n \leq x \implies n'+1 \leq x$$

   donc

   $$n'+1 \leq x \quad et \quad n'+1 > x$$

   ce qui est absurde.

Par conséquent la supposition qu'on a faite est fausse , d'où n *est unique.*

Exemple

1. $E(1,5) = 1$ car $1 \leq 1,5 < 2$
2. $E(-1,5) = -2$ car $-2 \leq -1,5 < -1$
3. $E(2) = 2$ car $2 \leq 2 < 3$
4. $\forall n \in \mathbb{Z} \quad E(n) = n$ car $n \leq n < n+1$
5. Courbe représentative de $E(x)$

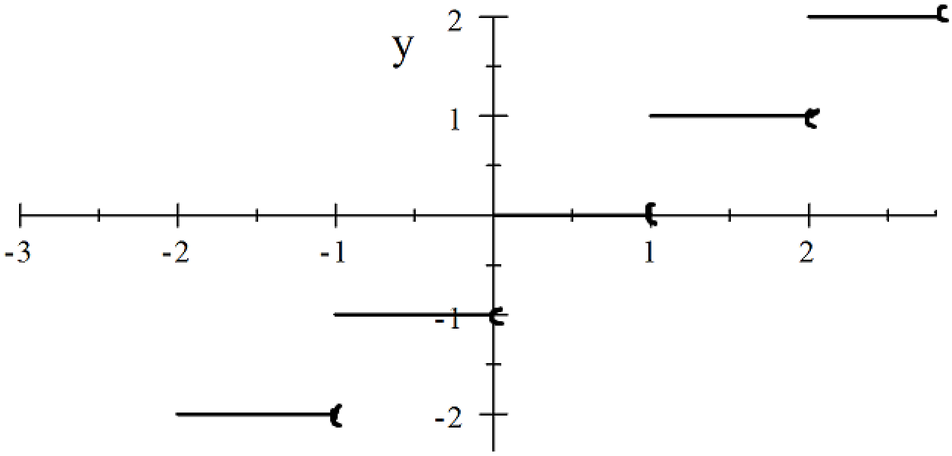

FIGURE 3.1 – courbe représentative de la partie entière

3.4.4 Les intervalles

Définition On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ noté I tout sous ensemble de $\mathbb{R}$ qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall x \in I \quad \forall y \in I \quad \forall z \in \mathbb{R} \quad (x < z < y \implies z \in I)$$

Les différents types d'intervalles

intervalle de $\mathbb{R}$	borné	non borné
ouvert	$]a, b[$	$]a, +\infty[,]-\infty, a[, \mathbb{R}$
fermé	$[a, b]$	$[a, +\infty[,]-\infty, a], \mathbb{R}$
semi ouvert	$[a, b[,]a, b]$	