Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Année universitaire: 2023 - 2024
Module: Algèbre 1
L1 Math+MI

T.D N°2 : Ensembles et applications

Exercice 1

(1) Ecrire en extension les ensembles suivants:

$A = \left\{ n \in \mathbb{Z} \setminus \frac{\sqrt{2}}{2} < |n| < \sqrt{3}\,\pi \right\}$ et $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \exists (n,p) \in \mathbb{N}^2 : \ x = \frac{n}{p} \text{ et } 1 \leq 2p \leq n \leq 4 \right\}$.

(2) Ecrire en compréhension les ensembles suivants:

$C = \left\{ \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{10}{11}, \frac{12}{13}, \frac{14}{15} \right\}$ et $D = \left\{ -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{7}, \ldots \right\}$.

Exercice 2

(1) Soit $E = \left\{ x \in \mathbb{Z} \setminus \left| x - \frac{1}{2} \right| < 1 \right\}$. Déterminer $P(E)$ et $P(P(E))$.

(2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $A_n = \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right]$.

(i) Montrer que la famille des ensembles $\left\{ A_n, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ est un recouvrement de l'intervalle $]0,1]$.

(ii) En déduire que $\{A_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est une partition de $]0,1]$.

Exercice 3

Considérons les deux ensembles E et F définis par:

$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus x^2 - xy - 2y^2 = 0 \right\}$ et $F = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus x + y = 0 \right\}$.

(1) Montrer que $F \subset E$.

(2) Déterminer y de $\mathbb{R}$ tel que : $(1,y) \in E$. Est ce qu'on a $E \subset F$?

(3) Montrer que : $E = F \cup G$ où G est un ensemble à déterminer.

(4) Soient les ensembles :

$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus y = x + 1 + \sqrt{x^2+1} \right\}$ et $B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus y = x + 1 - \sqrt{x^2+1} \right\}$.

(i) Déterminer l'ensemble H tel que : $H = A \cup B$.

(ii) Déterminer $H \cap F$.

Exercice 4

Soient $A, B,$ et C des parties d'un ensemble E.

(1) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que : $A \cup B = A \cap C$

(2) Démontrer que : $A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$, en utilisant : (i) Raisonnement directe. (ii) La contraposée.

(3) Montrer que : $\left[A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C \right] \Rightarrow B = C$

(4) $B \subset A \Rightarrow A \backslash B = C_A^B$

Exercice 5

Considérons les deux ensembles E et F définis par :

$E = \left\{ n \in \mathbb{N} \setminus n \text{ est pair et divise } 24 \right\}$ et $F = \left\{ n \in \mathbb{N} \setminus n \text{ est premier et } n < 9 \right\} \cup \{1, 10\}$.

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application définie par son graphe $G = \{(2,3), (4,5), (6,1), (8,5), (12,7)\}$.

(1) Vérifier que f est bien une application. (2) f est-elle injective? surjective?

(3) Déterminer $f(6), f(\{6\}), f\left(\{n \in E \setminus n \text{ divise } 8\}\right)$ et $f(E)$.

(4) Déterminer $f^{-1}(1), f^{-1}(\{1\}), f^{-1}(\{5\}), f^{-1}\left(\{n \in \mathbb{N} \setminus n \text{ est premier et } n < 9\}\right)$ et $f^{-1}(F)$.

Exercice 6

Soient $f : E \longrightarrow F$ une application et $A \in P(E),\ B \in P(F)$.

(1) Montrer que: $A \subset f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

(2) Montrer à l'aide des contres exemples que: $f^{-1}(f(A)) \not\subseteq A$ et $B \not\subseteq f(f^{-1}(B))$.

(3) Trouver des conditions sur f pour que : $A = f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(B)) = B$

Exercice 7

On note $U =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. Soit $f : U \longrightarrow U$ une application définie par:

$$f(x,y) = \left(xy, \frac{y}{x}\right)$$

(1) Montrer que f est injective? $\left(\text{On peut poser } t = \frac{y}{x}\right)$.

(2) f est-elle surjective? Si oui, déterminer f^{-1}.

Exercice 8

Soit $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \left[\frac{1}{4},+\infty\right[$ une application définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ h(x) = x + \sqrt{x} + \frac{1}{4}$.

(1) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ h(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2$.

(2) Ecrire l'application h comme la composée de deux applications f et g : $h = g \circ f$.

(3) Montrer que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

(4) Montrer que g est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

(5) En déduire que h est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\left[\frac{1}{4},+\infty\right[$, et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 9 $(SUPP)$

(I) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application définie par: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

(1) Déterminer $f\left(\{x \in \mathbb{R} \backslash\ |x| = 1\}\right)$ et $f^{-1}\left(\{y \in \mathbb{R} \backslash\ y^3 = 8\}\right)$. (2) f est-elle injective? surjective? bijective?

(3) Déterminer $f\left(\left[1,\sqrt{3}\,\right]\right)$, $f\left(\left]-\sqrt{3},-1\right]\right)$, $f\left(\left[-1,2\sqrt{2}\,\right[\right)$, $f(\mathbb{R}^+)$, $f^{-1}(]0,1])$ et $f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2},1\right]\right)$.

(II) Soit $g = f_{\backslash\mathbb{R}^+} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow J$ où $J = f(\mathbb{R}^+)$. (g est la restriction de f sur $\mathbb{R}^+$).

(1) Montrer que g est bijective et déterminer g^{-1}. (2) Déterminer $g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ par deux méthodes.

(3) Calculer $g \circ g^{-1}(y)$ pour $y \in J$ et $g^{-1} \circ g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 10 $(SUPP)$

On note $J =]1,+\infty[$. Soient f et g : $J \longrightarrow J$ deux applications définies par:

$$\forall x \in J,\ f(x) = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1} \quad \text{et } g(x) = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)^2.$$

(1) Déterminer $f([2,4[)$ et $g^{-1}(\{9\})$.

(2) Montrer que f est une bijection de J dans J et déterminer sa bijection réciproque.

(3) Vérifier que : $\forall x \in J,\ g(x) = (f(x))^2$.

(4) En déduire que :g est une bijection de de J dans J et déterminer sa bijection réciproque.

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

Exercice 1

(1) Considérons les ensembles suivants:
$A = \left\{ \dfrac{5n+8}{8n-1}, n \in \mathbb{N} \right\}$ et $B = \left\{ \dfrac{2n+4}{2n-1}, n \in \mathbb{N} \right\}$.
(i) Est ce que $\dfrac{17}{3} \in A$? $\dfrac{18}{15} \in A$? $\dfrac{43}{25} \in B$? $\dfrac{42}{37} \in B$?
(ii) Montrer que $\dfrac{6}{5}$ est un élément commun entre les ensembles A et B.
(2) Soients $C = \left\{ \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ et $D = \left\{ \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- Montrer que $A \cap B = \emptyset$.
$\left(\text{Indication : par l'absurde. } x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2k_1\pi}{5} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2k_2\pi}{5} \rightarrow k_1 - k_2 \notin \mathbb{Z}.\right)$

Exercice 2

Soient $A =]-\infty, 3]$, $B = [-2, 7[$ et $C =]-5, +\infty[$.
Déterminer : $A \cup B$, $B \cap C$, $C \backslash A$, $C_{\mathbb{R}}(B)$ et $A \triangle B$.

Exercice 3

Soit $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash\, x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$.
(1) Les couples $(1,0)$ et $(0,1)$ appartiennent-ils à A?
(2) Montrer que A ne peut être le produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.
Indication : Pa l'absurde et remaquer que $(1,1) \notin A$.

Exercice 4

Soient $A, B,$ et C des parties d'un ensemble E. Montrer que :
(1) $(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C)$
(2) $C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B)$
(3) $A \triangle B = A \cap B \Leftrightarrow A = B = \emptyset$

Exercice 5

Considérons les deux parties de $\mathbb{R}^2$, $E = [0,1]$ et $F = [0,2]$
(1) Dessiner $E \times F$ et $E \times E$.
(2) Soients $\begin{array}{rl} f : E & \rightarrow F \\ x & \mapsto 2 - x \end{array}$ et $\begin{array}{rl} g : F & \rightarrow E \\ x & \mapsto (x-1)^2 \end{array}$ deux applications.
(3) Préciser $g \circ f$ et $f \circ g$. A-t-on $g \circ f = f \circ g$ et $g \circ f = g$?
(4) Déterminer $f^{-1}(\{0\})$ et $g^{-1}\left(\left]0, \dfrac{1}{2}\right[\right)$.
(5) Montrer que: $g \circ f$ et bijective et préciser $(g \circ f)^{-1}$

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie par: $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.
(1) Déterminer $f(2)$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$. f est-elle injective?
(2) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $f(x) = 2$. f est-elle surjective? Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$.
(3) Montrer que l'application g définie sur $[-1,1]$ dans $[-1,1]$ par: $f(x) = g(x)$ est bijective et déterminer son inverse g^{-1}.

Exercice 7

Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow]-1,1[$ définie par: $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 8

Considérons les deux ensembles suivants :

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \backslash \exists\, t \in \left[0,\ 1\right] : x = t + 2\right\} \text{ et}$$
$$B = \left\{x \in \mathbb{R} \backslash \left|x - \frac{5}{2}\right| \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

(1) Ecrire l'ensemble B sous la forme d'un intervalle $\left[a,\ b\right]$.

(2) Montrer que $A = B$.

Exercice 9

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{4 + x^2}}.$$

(1) Déterminer $f\left(\{x \in \mathbb{R} \backslash\, x^2 = 4\}\right)$, $f(\mathbb{R}^+)$ et $f^{-1}\left(\{y \in \mathbb{R}^+ \backslash\, |y| = 1\}\right)$.

(2) f est-elle injective? surjective? bijective?

(3) Soit $g = f_{\backslash \mathbb{R}^+} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow J$ où $J = f(\mathbb{R}^+)$, la restriction de f sur $\mathbb{R}^+$.

- Montrer que g est bijective et déterminer g^{-1}.

Exercice 10

Soient f et g deux applications définies par :

$$f : \mathbb{R}\backslash\{3\} \longrightarrow \mathbb{R}/\{4\} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R}/\{4\} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{3\}$$
$$x \longmapsto \frac{4x+1}{x-3} \qquad\qquad x \longmapsto \frac{3x+1}{x-4}$$

(1) Montrer que $\forall y \in \mathbb{R}\backslash\{4\},\ \dfrac{3y+1}{y-4} \neq 3$.

(2) Déterminer pour $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{1,\ 3\right\}$ l'image de $3x$ par f et pour $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{-2,\ 2,\ 4\right\}$ l'image de x^2 par g.

(3) Déterminer les antécédents de $y = 1$ par f et par g.

(4) Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

(5) Montrer que f est injective.

(6) f est-elle surjective?

(7) f est-elle bijective? Si oui, déterminer f^{-1}.