Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen — Année universitaire: 2023 - 2024
Faculté des sciences — Module: Algèbre 1
Département de mathématiques — L1 Math

T.D N°1 : Logique et raisonnements

Exercice 1 Soient P, Q et R des propositions.

(1) En utilisant la table de vérité, montrer que l'implication suivante est toujours vraie :

$$[(P \Rightarrow Q) \wedge (R \Rightarrow Q)] \Rightarrow [(P \vee R) \Rightarrow Q]$$

(2) En déduire que

$$\left[(P \Rightarrow Q) \wedge \left(\overline{P} \Rightarrow Q\right)\right] \Rightarrow Q$$

Application: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que:

$$(i) \quad n(n+1) \text{ est pair} \qquad (ii) \quad (SUPP)\, \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \in \mathbb{N}$$

(3) Démontrer que les implications suivantes : $(A) \quad (P \wedge Q) \Rightarrow \overline{Q}$ et $(B) \quad \left(P \wedge \overline{Q}\right) \Rightarrow Q$ sont vraies toutes les deux si et seulement si P est fausse.

(4) $(SUPP)$ La proposition suivante est elle vraie? $(P \wedge Q) \Rightarrow (\overline{P} \vee Q)$

(5) $(SUPP)$ Les propositions suivantes sont-elles des tautologies?

$$[(P \Rightarrow Q) \wedge P] \Rightarrow Q \quad \text{et} \quad (P \vee \overline{P}) \vee Q \Rightarrow (P \wedge \overline{P}) \wedge \overline{Q}$$

Exercice 2 $\left(\textit{Connecteurs NAND } \left(\textit{NON ET}\right) \textit{ et NOR } \left(\textit{NON OU}\right)\right)$

Pour deux propositions P et Q, on définit les connecteurs $NAND$ $\left(NON\ ET\right)$ et NOR $\left(NON\ OU\right)$ par

$$P \text{ NAND } Q \Leftrightarrow P \uparrow Q \Leftrightarrow \overline{P \wedge Q} \text{ et } P\ NOR\ Q \Leftrightarrow P \downarrow Q \Leftrightarrow \overline{P \vee Q}$$

(1) Dresser les tables de vérité des deux connecteurs $NAND$ et NOR.

(2) Déterminer $P \uparrow P, P \downarrow P, \overline{P \uparrow Q}$ et $\overline{P \downarrow Q}$

(3) Exprimer $\overline{P}, P \vee Q, P \wedge Q$ et $P \Rightarrow Q$ à l'aide des connecteurs $NAND \uparrow$ et $NOR \downarrow$.

Remarque : Les connecteurs $NAND \uparrow$ et NOR $\downarrow$ ont une importance en informatique et en électronique.

Exercice 3

(I) Donner la négation et la valeur de vérité des propositions (prédicats) suivantes:

$$P_1 : \exists\, x \in \mathbb{R}, x^2 - 2 = 0 \qquad P_2 : \exists!\, x \in \mathbb{R}, \frac{2x}{x^2+1} = \frac{4}{5}$$

$$Q_1 : \forall\, n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{2} \in \mathbb{N} \qquad Q_2 : \exists\, x \in [0, \pi], \cos x + \sin x = 1$$

$$R_1 : \forall\, x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R} : y^2 = x \qquad R_2 : \exists\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R} : y^2 = x$$

(II) Ecrire à l'aide des quantificateurs et des symboles mathématiques les expressions suivantes:

(1) Le cube de tout réel est positif.

(2) Certains réels sont strictement superieurs à leur carré.

(3) Entre deux réels il existe au moins un rationnel.

(4) Pour tout réel x, il existe un entier naturel n, tel que x est inférieur à n.

(5) Pour tout réel x, il existe un entier relatif n, tel que x est superieur ou égal à n et inférieur strictement à $n+1$.

(6) Il existe un unique entier naturel inferieur stictement à tous les autres entiers naturels.

Exercice 4

(I) $\left(\textit{Raisonnements directs}\right)$ Démontrer les assertions suivantes :

$$(1)\ \forall x \in \mathbb{R}, |x-1| \leq x^2 - x + 1$$

$$(2)\ \forall x,y \in \mathbb{R}, 0 < x \leq 2 \ et\ 0 < y \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 1$$

$$(3) \forall x \in \mathbb{R}^+, \frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow x = 0$$

(II) $(\textit{Contraposée ou absurde})$

(1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, (x \neq -5$ et $x \neq -8) \Rightarrow \dfrac{x+2}{x+5} \neq 2$

(2) $(SUPP)$ Montrer que $\forall x,y \in \mathbb{R}, x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.

(3) Un rectangle a pour aire $170\ m^2$. Montrer que sa longueur est supérieure à $13m$.

(4) $(SUPP)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que si n est le carré d'un entier, alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

(5) $(SUPP)$ Soit $a \in]1,2[$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + ax + 1 \neq 0$

Exercice 5

(1) Soient $l_1,\ l_2 \in \mathbb{R}$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

$P : (\forall \varepsilon > 0, |l_1 - l_2| < \varepsilon) \Rightarrow l_1 = l_2$ $\qquad Q : (\exists \varepsilon > 0, |l_1 - l_2| \geq \varepsilon)\ OU\ l_1 = l_2 0$

$R : l_1 \neq l_2 \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0, |l_1 - l_2| \geq \varepsilon)$

(2) Montrer que la proposition R est vraie. En déduire que P et Q sont vraies.

(Indication : $(l_1 \neq l_2) \Rightarrow |l_1 - l_2| > 0$)

Exercice 6 $\left(\textit{Raisonnements par récurrence}\right)$

(1) Montrer par récurrence que : $\forall x > 0, \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ (1+x)^n \geq 1 + n.x$ (Inégalité de Bernouli)

$(2) \forall n \in \mathbb{N}^*$, on considère la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4}.+\ldots+\dfrac{1}{n.(n+1)}$

(i) Calculer $S_1,\ S_2,\ S_3$ et S_4.

(ii) Proposer ou conjecturer une formule en n pour S_n. (iii) Démontrer cette formule par récurrence.

Exercice 7 $\left(\textit{différents types de démonstrations pour un énoncé évident}\right)$

Proposer de l'énoncé suivant divers démonstrations : $P(n) : \forall n \in \mathbb{N}$, l'entier $5^n + 1$ est pair.

(i) Par récurrence (ii) Par l'absurde (iii) En utilisant une identité remarquable pour factoriser $5^n - 1$

(iv) En utilisant une méthode distincte des trois précédentes.

Exercices supplémentaires

Exercice 1 ($Le\ OU\ exclusif\ (XOR)\ noté\ \oplus$)

Pour deux propositions A et B, on définit le OU exclusif (XOR) noté $\oplus$ par: $A \oplus B$ est vraie si A est vraie ou B est vraie et non toutes les deux vraies à la fois. Montrer que :

$$A \oplus B \Leftrightarrow (A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B})$$

$$A \oplus B \Leftrightarrow B \oplus A \qquad A \oplus F \Leftrightarrow A \qquad A \oplus A \Leftrightarrow F$$

où A, B, C et F sont des propositions avec F fausse.

Exercice 2 (*Logique à trois valeurs*)

Si on n'accepte pas le principe du tiers exclu (comme c'est le cas dans la logique intuitionniste, المنطق الحدسي), on est tenté d'introduire une troisième valeur de vérité.

Valeur	1	0	$\frac{1}{2}$
Interprétation	vraie	fausse	possible

- Déterminer les tables de vérité des propositions suivantes : $\overline{P},\ P \vee Q,\ P \wedge Q,\ P \Rightarrow Q$ et $P \Leftrightarrow Q$

Exercice 3

Montrer que :

$(1)\ \forall a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow |a + b| \leq \sqrt{2}$

$(i)\ \forall x \in \mathbb{R},\ x + \dfrac{1}{x} \geq 2.$ .....$(ii)\ \forall x, y \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} = 2 \Rightarrow x = y = 0$

(iii)Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{x^2 + 1} = 2x$.

Exercice 4

Montrer que les propositions suivantes sont fausses.

$(i)\ \ \forall x \in [0, 1], x^2 \geq x \quad (ii)\ \forall x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \geq x + y \quad (iii)\ \ \forall a, b \in \mathbb{R}, \sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

(iv) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x$, n'est ni paire ni impaire.

$(v)\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, l'entier $n^2 + n + 11$ est premier.

Exercice 5

Soient n et p des entiers naturels avec $n > p$.

Montrer que : $n.p$ est un entier pair OU $n^2 - p^2$ est un multiple de 8.

Exercice 6

Montrer par récurrence que

$(1)\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ n^2 < 3^n.$ (Indication : $\forall\ n \geq 2,\ n^2 \geq 2n$ et $n^2 > 1$).

$(2)\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}.+\ldots+\frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$

Exercice 7

Soient $x_1,\ x_2, \ldots x_n \in [0,\ 1]$.

Montrer par récurrence que :$\forall\ n \geq 1,\ \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1 - x_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k.$

Exercice 8

Considérons les propositions suivantes:

$$P : \forall x \in \mathbb{R}^+, \sqrt{x^2+1} + x > 0,$$
$$Q : \forall x \in \mathbb{R}^{-*}, \sqrt{x^2+1} + x > 0 \text{ et}$$
$$R : \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2+1} + x > 0$$

(1) Montrer par un raisonnement direct que P est vraie.
(2) Ecrire la négation de la proposition Q.
(3) Montrer par l'absurde que Q est vraie.
(4) En déduire que R est vraie.

Exercice 9

(I) (1) Rappeler la somme $\sum_{k=1}^{n} k$.
(2) Vérifier que : $2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$.
(3) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(4) En déduire la somme $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$.
(II) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $4^n + 6n - 1$ est divisible par 9.

Exercice 10

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la somme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n(n+1).$$

(1) Calculer S_1, S_2 et S_3 .
(2) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
(3) En déduire la somme $\sum_{k=1}^{n} k^2$.
$\left(\text{Indication : } \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k\right)$;

Exercice 11

(1) Calculer $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ et $\left(\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$
(2) Déterminer deux irrationnels a et b tels que a^b soit rationnel..

Exercice 12

On dit que trois entiers naturels a, b et c forment un triplet pythagoricien s'ils satisfont la relation : $a^2 + b^2 = c^2$.
(1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $2n$, $n^2 - 1$ et $n^2 + 1$ forment un triplet pythagoricien.
(2) 20 et 21 sont deux entiers naturels d'un triplet pytaroricien. Trouver le troisième.

Exercice 13 (Divisibilité par 37)

Montrer que tous les entiers naturels du type suivant sont toujours divisibles par 37:
- nombres à 3 chiffres identiques $(n = aaa)$
- nombres à 6 chiffres identiques $(n = aaaaaa)$
- nombres écrits en juxtaposant trois fois deux chiffres donnés $(n = ababab)$