2 Ensembles et applications
2-1 Ensembles

Sommaire

2-1-1 Notion d'ensemble

En mathématiques, on rencontre souvent des « ensembles », par exemple les nombres réels forment un ensemble.
La notion d'ensemble est fondamentale dans les mathématiques modernes.
Nous utilisons une définition simple issue de la théorie naïve des ensembles :

Définition 1 : On appelle ensemble E toute collection d'objets distincts appelés éléments de E.
On note souvent un ensemble par des lettres majuscules (A, B, C, D, E, F. . .) et ses éléments par des lettres minuscules (a, b, c, x, y, z . ..)
Si un objet x est un élément d'un ensemble E, on dit que x **appartient** à E et on écrit $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$.
Sinon on note $x \notin E$ (x **n'appartient pas** à E) .
On définit un ensemble par l'une des façons suivantes :
$1-$ **Par extension :** on donne la **liste** de tous ses éléments (entre deux accolades) .
$2-$ **Par compréhension :** on donne une **propriété** (**relation**) caractérisant ses éléments.

2-1-1 Notion d'ensemble

Exemples

Ensembles en extension

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ensemble des chiffres du système décimal.
$B = \{a, b, c, d, ..., x, y, z\}$ ensemble de l'alphabet.

Ensembles en compréhension

$E = \{n \in \mathbb{N} : \ n \text{ est premier et } n \leq 20\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$
$F = \{x \in \mathbb{R} : \ |x| < 1\} =]-1, 1[$
$G = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq 0 \text{ et } x \leq 0\} = \{0\}$, ensemble contenant un seul élément, appelé un **singleton**.
$H = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\}$. L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'admet pas de solutions réelles.
L'ensemble H ne contient aucun élément.
On l'appelle **ensemble vide** noté : $\varnothing$ ou $\{\}$.

Remarque

$\{0,1,2\} = \{1,2,0\} = \{0,1,2,1,0\}$

Définition 2

Si E est un ensemble fini, alors le nombre de ses éléments est appelé **cardinal**.

On le note : $\mathbf{card}(E)$ ou $|E|$;

Exemples :

- $E = \left\{n \in \mathbb{N} : \sqrt{2} < n \leq 3\pi\right\} = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

$\text{Card}(E) = 8$

- $\text{Card}(\varnothing) = 0$
- Si un ensemble E est infini, alors $\text{card}(E) = +\infty$.

Ensembles particulièrement importants :

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ ensemble des nombres naturels.

$\mathbb{N}^* = \{n \in \mathbb{N} : n \neq 0\} = \{n \in \mathbb{N} : n > 0\} = \{1, 2, 3, ...\}$.

$\mathbb{Z} = \{... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ ensemble des entiers (nombres relatifs).

$\mathbb{Z}^* = \{n \in \mathbb{Z} : n \neq 0\}$.

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z},\ \ q \in \mathbb{Z}^* \right\}$ ensemble des nombres rationnels.

$\mathbb{Q}^* = \{r \in \mathbb{Q},\ \ r \neq 0\}$.

I : ensemble des nombres irrationnels. $\left(\pi,\ e,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \ln 2, ...\right)$

$\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels (rationnels et irrationnels) .

$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R},\ \ x \neq 0\}$, $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R},\ \ x \geq 0\}$,

$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R},\ \ x \leq 0\}$, $\mathbb{R}^{+*} = \{x \in \mathbb{R},\ \ x > 0\}$,

$\mathbb{R}^{-*} = \{x \in \mathbb{R},\ \ x < 0\}$.

$\mathbb{C} = \left\{a + ib, a, b \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1\right\}$ ensemble des nombres complexes.

2-1-2 Comparaison des ensembles

Inclusion $\subset$

On dit q'un ensemble A est **inclus** dans un ensemble B ou A est une **partie** de B ou A est un **sous-ensemble** de B, si tout élément de A et un élément de B et on note $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$.

$[A \subset B] \Longleftrightarrow [\forall x, \ \ (x \in A \Longrightarrow x \in B)]$

$[A \not\subset B] \Longleftrightarrow [\exists x, \ \ (x \in A \text{ et } x \notin B)]$

Exemples

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- $A = \{x \in \mathbb{R}, \ 0 < x < 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}, \ \ |x| < 1\}$, $C = \{x \in \mathbb{R}, \ 0 \leq x \leq 1\}$.

On a $A \subset B$, $A \subset C$ mais $C \not\subset B$.

Propriétés : Soient A, B et C des ensembles. On a
(i) $A \subset A$, (ii) $\varnothing \subset A$, (iii) $[A \subset B \text{ et } B \subset C] \Longrightarrow A \subset C$

Preuve

(i) $A \subset A$ est évidente $(\forall x, (x \in A \Longrightarrow x \in A))$
(ii) $\varnothing \subset A$, par l'absurde :
supposons que $\varnothing \not\subset A$. Donc $\exists x \in \varnothing$ et $x \notin A$;
C'est une contradiction, car $\varnothing$ ne contient aucun élément.
(iii) $[A \subset B \text{ et } B \subset C] \Longrightarrow A \subset C$
Soit $x \in A$.

$$\begin{aligned} x \in A &\Longrightarrow x \in B \text{ car } A \subset B \\ &\Longrightarrow x \in C \text{ car } B \subset C \\ &\Longrightarrow A \subset C. \end{aligned}$$

2-1-2 Comparaison des ensembles

Egalité $=$

Deux ensembles A et B sont égaux, s'ils ont les mêmes éléments.

$[A = B] \Longleftrightarrow [A \subset B \textbf{ et } B \subset A]$

$[A \neq B] \Longleftrightarrow [A \not\subset B \textbf{ ou } B \not\subset A]$.

Exemples

- $\mathbb{Z}^+ = \{|n| : \ n \in \mathbb{Z}\} = \{0, 1, 2, ...\} = \mathbb{N}$.
- $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\} =]-1, 1[= B$.
- $E = \left\{x \in \mathbb{R} : \exists t \in \mathbb{R}, \ x = t^2 + 1\right\}$, $F = [1, +\infty[$.

Montrons que $E = F$. $[E = F] \Longleftrightarrow [E \subset F \textbf{ et } F \subset E]$

(i) Montrons que : $E \subset F$. Soit $x \in E$.

(ii) $F \subset E$. Soit $x \in F$.

Conclusion : $[E \subset F \textbf{ et } F \subset E] \Longleftrightarrow [E = F]$

2-1-2 Comparaison des ensembles

Egalité $=$

Deux ensembles A et B sont égaux, s'ils ont les mêmes éléments.

$[A = B] \Longleftrightarrow [A \subset B \text{ **et** } B \subset A]$

$[A \neq B] \Longleftrightarrow [A \not\subset B \text{ **ou** } B \not\subset A]$.

Exemples

$\mathbb{Z}^+ = \{|n| : \; n \in \mathbb{Z}\} = \{0, 1, 2, ...\} = \mathbb{N}$.

$A = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\} =]-1, 1[= B$.

$E = \left\{x \in \mathbb{R} : \exists t \in \mathbb{R}, \; x = t^2 + 1\right\}, \; F = [1, +\infty[$.

Montrons que $E = F$. $[E = F] \Longleftrightarrow [E \subset F \textbf{ et } F \subset E]$

(i) Montrons que : $E \subset F$. Soit $x \in E$.

$$x \in E \Longrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, x = t^2 + 1 \geq 1$$
$$\Longrightarrow x \in [1, +\infty[= F \Longrightarrow E \subset F.$$

(ii) $F \subset E$. Soit $x \in F$.

$$x \in F \Longrightarrow x \geq 1 \Longrightarrow \exists y \geq 0 : x = y + 1$$
$$\Longrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \; y = t^2 \text{ et } x = t^2 + 1$$
$$\Longrightarrow x \in E \Longrightarrow F \subset E.$$

Conclusion : $[E \subset F \textbf{ et } F \subset E] \Longleftrightarrow [E = F]$

2-1-2 Comparaison des ensembles

Remarque :

$[A \subseteq B] \Longleftrightarrow [A \subset B$ **ou** $A = B]$, $[A \subsetneq B] \Longleftrightarrow [A \subset B$ **et** $A \neq B]$.

Ensemble des parties d'un ensemble

L'ensemble formé de toutes les parties d'un ensemble E est appelé **ensemble des parties** de E et est noté $P(E)$.

Définition

Pour tout ensemble E, $P(E) = \{A : A \subseteq E\}$ et $A \in P(E) \Longleftrightarrow A \subseteq E$

Remarque

Comme $\emptyset \subset E$ et $E \subset E$ alors $P(E) \neq \emptyset$ et $\emptyset$, $E \in P(E)$.

Exemples

$P(\emptyset) = \{\emptyset\} \longrightarrow \text{card}(P(\emptyset)) = 1 = 2^0$

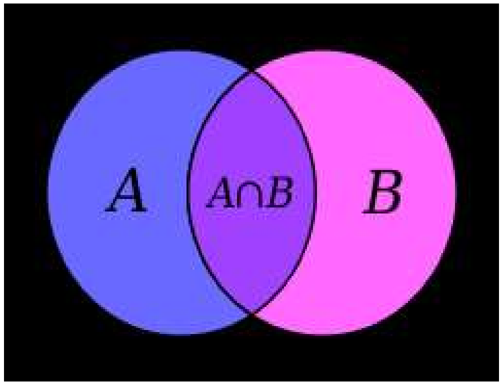
$P(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\} \longrightarrow \text{card}(P(\{a\})) = 2 = 2^1$.

$P(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} \longrightarrow \text{card}(P(\{a, b\})) = 4 = 2^2$.

$P(\{a, b, c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
$\longrightarrow \text{card}(P(\{a, b, c\})) = 8 = 2^3$.

Proposition : Si $\text{card}(E) = n$, alors $\text{card}(P(E)) = 2^n$.

Nous utilisons maintenant des connecteurs pour définir les opérations ensemblistes.
Ces connecteurs nous permettent de construire des nouvaux ensembles.
Définition (**intersection** $\cap$)
Soient A et B deux parties d'un ensemble E $(A, B \in P(E))$.
L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble défini par
$A \cap B = \{x \in E : x \in A \textbf{ et } x \in B\}$. $(\cap :: \wedge)$



$x \in A \cap B \iff x \in A \textbf{ et } x \in B$
$x \notin A \cap B \iff x \notin A \textbf{ ou } x \notin B$

Exemples

$\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$

$]-1,1] \cap [-\frac{1}{2}, 2[= [-\frac{1}{2}, 1]$.

$A = \{n \in \mathbb{N} : \ \exists k \in \mathbb{N}, \ n = 2k\}$, ensemble des nombres naturels pairs.

$B = \{n \in \mathbb{N} : \ \exists l \in \mathbb{N}, \ n = 2l + 1\}$, ensemble des nombres naturels impairs.

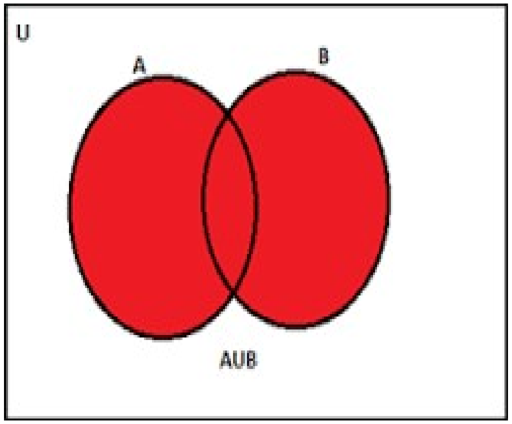
$A \cap B = \emptyset$

Définition

Deux ensembles A et B sont dits **disjoints** lorsque $A \cap B = \emptyset$.

2-1-3 Opérations sur les ensembles

Définition $($**union** $\cup$ $)$
La **réunion (union)** des deux ensembles A et B est l'ensemble défini par
$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$ $(\cup :: \vee)$



$x \in A \cup B \Longleftrightarrow x \in A$ ou $x \in B$
$x \notin A \cap B \Longleftrightarrow x \notin A$ et $x \notin B$

Exemples

$\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^{-*} = \mathbb{R}^*$

$[-1, 1] \cup \left[-\frac{1}{2}, 2\right[= [-1, 2[.$

$A = \{n \in \mathbb{N} : \ \exists k \in \mathbb{N}, \ n = 2k\}, \ B = \{n \in \mathbb{N} : \ \exists l \in \mathbb{N}, \ n = 2l + 1\}.$

$A \cup B = \mathbb{N}$

Théorème

Soient A et B deux ensembles finis. Alors on a

$(\mathrm{card}\,(A \cup B) = \mathrm{card}\,(A) + \mathrm{card}\,(B) - \mathrm{card}\,(A \cap B)).$

Propriétés $(\cap, \cup)$

Soient $A, B \in P(E)$.

- $A \cap A = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap E = A$
- $A \cup A = A$, $A \cup \varnothing = A$, $A \cup E = E$
- $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ et $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Complément d'un ensemble

Soient $A, B \in P(E)$.

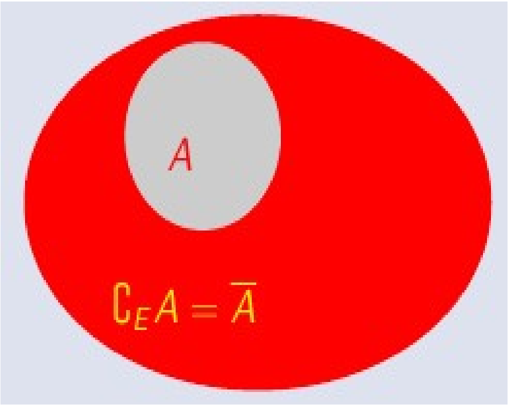
Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont disjoints.

Et si de plus $A \cup B = E$, on dit que A et B sont **complémentaires** dans E.

A est le **complément** de B dans E

B est le **complément** de A dans E

On note par : $A = C_E^B = C_E(B)$ et $B = C_E^A = C_E(A)$



Autre notation

$C_E^A = \overline{A} = A^C$ (Si l'ensemble E est connu)

Remarque

$A = C_E^B = C_E\left(C_E^A\right) = A$

$C_E\left(A\right) = \{x \in E : x \notin A\} \ \ \left(C_E\left(A\right) :: \overline{A} \text{ négation}\right)$

$x \in C_E\left(A\right) \Longleftrightarrow x \notin A$ et $x \notin\in C_E\left(A\right) \Longleftrightarrow x \in A$

Exemples

$C_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{N}} = \{-n : \ n \in \mathbb{N}^*\}$, $C_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}} = \{a + ib : a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}^*\}$

$A = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$, $C_{\mathbb{R}}^{A} = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$

$C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{R}^*} = \{0\}$

$A = \left]-1, 0\right]$, $C_{\mathbb{R}}^{A} = \left]-\infty, -1\right] \cup \left]0, +\infty\right[$.

2-1-3 Opérations sur les ensembles

Propriétés

Soient $A, B \in P(E)$.

1. $C_E^E = \emptyset$
2. $C_E^\emptyset = E$
3. $A \cap C_E^A = \emptyset$
4. $A \cup C_E^A = E$
5. $C_E\left(C_E^A\right) = A$
6. $A \subset B \Longrightarrow C_E^B \subset C_E^A$

2-1-3 Opérations sur les ensembles

Preuve

1. $C_E^E = \emptyset$. par l'absurde

- Supposons que $C_E^E \neq \emptyset$.
- Alors $\exists x \in C_E^E \Longrightarrow x \in E$ et $x \notin E$. C'est une contradiction.

2. $C_E^{\emptyset} = E$

- $x \in C_E^{\emptyset} \Longleftrightarrow x \in E$ et $x \notin \emptyset \Longleftrightarrow x \in E$

3. $A \cap C_E^A = \emptyset$

- Par l'absurde. Supposons que $A \cap C_E^A \neq \emptyset$
- Alors $\exists x \in A \cap C_E^A \Longrightarrow x \in A$ et $x \in C_E^A$. C'est une contradiction.
- $\Longrightarrow x \in A$ et $x \notin A$. C'est une contradiction

2-1-3 Opérations sur les ensembles

4. $A \cup C_E^A = E$

- $x \in A \cup C_E^A \iff x \in A$ ou $x \in C_E^A$
- $\iff x \in A$ ou $(x \in E$ et $x \notin A)$
- $\iff x \in E$

5. $C_E\left(C_E^A\right) = A$

- $x \in C_E\left(C_E^A\right) \iff x \notin C_E^A \iff x \in A.$

6. $A \subset B \Longrightarrow C_E^B \subset C_E^A$

- Soit $x \in C_E^B \Longrightarrow x \notin B \Longrightarrow x \notin A$ car $A \subset B$
- $\Longrightarrow x \in C_E^A$

Lois de De Morgan

Soient $A, B \in P(E)$. On a

1. $C_E(A \cap B) = C_E^A \cup C_E^B$ et
2. $C_E(A \cup B) = C_E^A \cap C_E^B$

Preuve

1. $x \in C_E(A \cap B) \iff x \in E$ et $x \notin A \cap B$

$$\begin{aligned} &\iff x \in E \text{ et } (x \notin A \text{ ou } x \notin B). \\ &\iff (x \in E \text{ et } x \notin A) \text{ ou } (x \in E \text{ et } x \notin B). \\ &\iff \left(x \in C_E^A\right) \text{ ou } \left(x \in C_E^B\right). \\ &\iff x \in \left(C_E^A \cup C_E^B\right) \end{aligned}$$

Conclusion : $C_E(A \cap B) = C_E^A \cup C_E^B$

De la même manière, on montre par une seconde méthode que :

2. $C_E(A \cup B) = C_E^A \cap C_E^B$

$C_E(A \cup B) = C_E^A \cap C_E^B \iff$
$\left[C_E(A \cup B) \subset C_E^A \cap C_E^B \text{ et } C_E^A \cap C_E^B \subset C_E(A \cup B)\right]$

- $C_E(A \cup B) \subset C_E^A \cap C_E^B$?

Soit $x \in C_E(A \cup B) \Longrightarrow x \notin A \cup B \Longrightarrow x \notin A$ et $x \notin B$
$\Longrightarrow x \in C_E^A$ et $x \in C_E^B \Longrightarrow x \in C_E^A \cap C_E^B$
Donc, $C_E(A \cup B) \subset C_E^A \cap C_E^B$

- $C_E^A \cap C_E^B \subset C_E(A \cup B)$?

Soit $x \in C_E^A \cap C_E^B \Longrightarrow x \in C_E^A$ et $x \in C_E^B \Longrightarrow x \notin A$ et $x \notin B$
$\Longrightarrow x \notin A \cup B \Longrightarrow x \in C_E(A \cup B)$
Donc, $C_E^A \cap C_E^B \subset C_E(A \cup B)$
Conclusion : $C_E(A \cup B) = C_E^A \cap C_E^B$

Exemples

Vérifier les lois de De Morgan pour les ensembles suivants :
$A =]-1, 1]$, $B = [0, 2[$ et $E = \mathbb{R}$

Différence entre deux ensembles

Définition

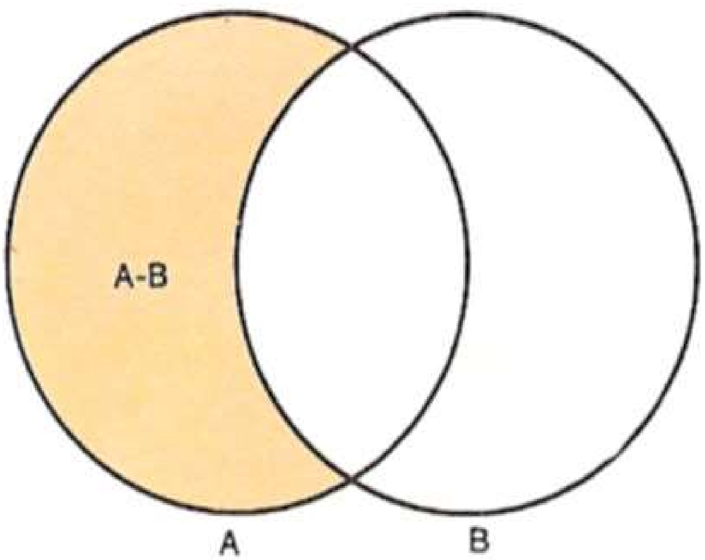
Soient $A, B \in P(E)$.

La **différence** entre A et B est l'ensemble défini par :

$A \backslash B = \{x \in E : x \in A \text{ et } x \notin B\}$.

$x \in A \backslash B \Longleftrightarrow x \in A$ et $x \notin B$

$x \notin A \backslash B \Longleftrightarrow x \notin A$ ou $x \in B$



Exemples

$A =]-1, 1[\,,\ B = [0, 2]$

$A \backslash B =]-1, 0[\,,\ B \backslash A = [1, 2]$

$\mathbb{R} \backslash A =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[= C_{\mathbb{R}}^{A}$

$\mathbb{R} \backslash B =]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[= C_{\mathbb{R}}^{B}$

$A \cap C_{\mathbb{R}}^{B} =]-1, 0[= A \backslash B$

Propriétés

Soient $A, B, C \in P(E)$.

1. $A \backslash B = A \cap C_E^B$
2. $E \backslash A = C_E^A$
3. $A \backslash A = \emptyset$
4. $A \backslash \emptyset = A$
5. $B \subset A \Longrightarrow A \backslash B = C_A^B$
6. $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \backslash C$
7. $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$

Preuve

1. $A \backslash B = \{x \in E : x \in A \text{ et } x \notin B\} = \{x \in E : x \in A \text{ et } x \in C_E^B\}$

$= \{x \in E : x \in A \cap C_E^B\} = A \cap C_E^B$

2. $E \backslash A = \{x \in E : x \in E \text{ et } x \notin A\} = \{x \in E : x \notin A\} = C_E^A.$
3. $A \backslash A = \{x \in E : x \in A \text{ et } x \notin A\} = \emptyset$
4. $A \backslash \emptyset = \{x \in E : x \in A \text{ et } x \notin \emptyset\} = A$
5. Supposons que $B \subset A$, et montrons que $A \backslash B = C_A^B$

$A \backslash B = A \cap C_E^B = A \cap \left(C_A^B \cup C_E^A\right) = \left(A \cap C_A^B\right) \cup \left(A \cap C_E^A\right)$
$= \left(A \cap C_A^B\right) \cup \emptyset = A \cap C_A^B = C_A^B$ car $B \subset A$

6. $A \backslash (B \cup C) = A \cap C_E (B \cup C) = A \cap \left(C_E^B \cap C_E^C\right)$

$= \left(A \cap C_E^B\right) \cap C_E^C = (A \backslash B) \cap C_E^C = (A \backslash B) \backslash C$

7. $A \backslash (B \cap C) = A \cap C_E (B \cap C) = A \cap \left(C_E^B \cup C_E^C\right)$

$= \left(A \cap C_E^B\right) \cup \left(A \cap C_E^C\right) = (A \backslash B) \cup = (A \backslash B) \backslash \cup (A \backslash C).$

2-1-3 Opérations sur les ensembles

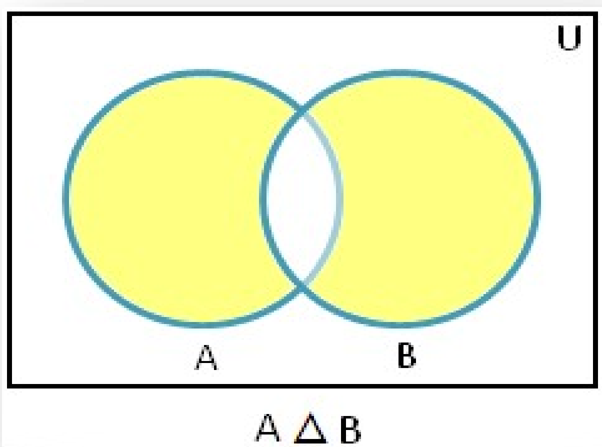
Différence symétrique entre deux ensembles.

Soient $A, B \in P(E)$.

La différence symétrique entre deux ensembles A et B est le sous ensemble de E, dénoté par $A \triangle B$ et est défini par :

$A \triangle B = \{x \in E : x \in A \backslash B \text{ ou } x \in B \backslash A\}$.

$A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$



2-1-3 Opérations sur les ensembles

Exemple

$E = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 18\}$.

$A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ est un multiple de } 3\} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

$B = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ est pair}\} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$

$A \backslash B = \{3, 9, 15\}$, $B \backslash A = \{2, 4, 8, 10, 14, 16\}$

$(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = \{2, 3, 4, 8, 9, 10, 14, 15, 16\}$

$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18\}$

$A \cap B = \{6, 12, 18\}$

$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{2, 3, 4, 8, 9, 10, 14, 15, 16\}$

On a

$A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Propriétés

1. $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap \left(C_E^A \cup C_E^B\right)$
2. $A \triangle A = \emptyset$,
3. $A \triangle \emptyset = A$
4. $A \triangle C_E^A = E$
5. $C_E\left(A \triangle B\right) = \left(C_E^A \cup B\right) \cap \left(C_E^B \cup A\right)$

Preuve

1. $A\triangle B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)=\{x\in E : x\in A\backslash B \text{ ou } x\in B\backslash A\}.$

$=\{x\in E : x\in (x\in A \text{ et } x\notin B) \text{ ou } (x\in B \text{ et } x\notin A)\}.$
$=\{x\in E : (x\in A \text{ ou } x\in B) \text{ et } (x\in A \text{ ou } x\notin A) \text{ et } (x\notin B \text{ ou } x\in B\ )$
$\text{et } (x\notin B \text{ ou } x\notin A\ )\}.$
$=\{x\in E : (x\in A\cup B) \text{ et } (x\notin A\cap B)\}=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$
$=(A\cup B)\cap C_E\,(A\cap B)=(A\cup B)\cap\left(C_E^A\cup C_E^B\right)$

2. $A\triangle A=\{x\in E : x\in A\backslash A \text{ ou } x\in A\backslash A\}=\varnothing$
3. $A\triangle\varnothing=\{x\in E : x\in A\backslash\ \varnothing \text{ ou } x\in\varnothing\backslash A\}=A$
4. $A\triangle C_E^A=\{x\in E : x\in A\backslash\ C_E^A \text{ ou } x\in C_E^A\backslash A\}=E$
5. $C_E\,(A\triangle B)=C_E\left[(A\cup B)\cap\left(C_E^A\cup C_E^B\right)\right]$

$=C_E\,(A\cup B)\cup C_E\left[C_E^A\cup C_E^B\right]$
$=\left(C_E^A\cap C_E^B\right)\cup\left[C_E\left(C_E^A\right)\cap C_E\left(C_E^B\right)\right]$
$=\left(C_E^A\cap C_E^B\right)\cup(A\cap B)=\left(C_E^A\cup B\right)\cap\left(C_E^B\cup A\right)$

2-1-4 Notion de recouvrement et de partition

Soit $I = \{1, 2, 3, ...n\} \subset \mathbb{N}$, et $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de parties d'un ensemble E.

$$A = \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i=1}^{i=n} A_i = \{x \in E :\ \exists i \in I,\ x \in A_i\}$$

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Longleftrightarrow \exists i \in I, x \in A_i$$

$$B = \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i=1}^{i=n} A_i = \{x \in E :\ \forall i \in I,\ x \in A_i\}$$

$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \Longleftrightarrow \forall i \in I, x \in A_i$$

Lois de De Morgan

1. $C_E\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} C_E\left(A_i\right)$
2. $C_E\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} C_E\left(A_i\right)$

2-1-4 Notion de recouvrement et de partition

Définition
On dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ des parties de E est un recouvrement de E si et seulement si $\bigcup_{i\in I} A_i = E$.

Exemple Soit $A_n =]-n, n[\subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.
Montons que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement de $\mathbb{R}$.
Il est clair que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-n, n[\subset \mathbb{R}$.
Montrons que $\mathbb{R} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-n, n[$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\mathbb{R}$ est archimèdien, alors $\exists n \in \mathbb{N} : |x| < n$.
Donc, $\exists n \in \mathbb{N} : x \in]-n, n[$ et par suite $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-n, n[$.
D'où $\mathbb{R} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-n, n[$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-n, n[= \mathbb{R}$.
On déduit que la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement de $\mathbb{R}$.

2-1-4 Notion de recouvrement et de partition

Définition

On dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ forme une partition de E si et seulement si

$$\begin{cases} \forall i\in I,\ A_i\neq\emptyset \\ A_i\cap A_j=\emptyset \quad \text{si } i\neq j \\ \displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = E \end{cases} \iff \begin{cases} \forall i\in I,\ A_i\neq\emptyset \\ A_i\cap A_j=\emptyset \quad \text{si } i\neq j \\ (A_i)_{i\in I} \ \text{un recouvrement de } E \end{cases}$$

Exemples

- $\{\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^{-*}\}$ est une partition de $\mathbb{R}$.
- Soit $A\subset E$.

$\{A, C_E^A\}$ est une partition de E $\ (A, E\neq\emptyset)$

- Soient $A, B\in P(E)$

$E_1=A\backslash B,\ E_2=B\backslash A,\ E_3=A\cap B,\ E_4=C_E(A\cup B)$.
$\{E_1=A\backslash B, E_2=B\backslash A, E_3=A\cap B\}$ est une partition de $A\cup B$.
$\{E_1=A\backslash B, E_2=B\backslash A, E_3=A\cap B, E_4=C_E(A\cup B)\}$ est une partition de E.

2-1-5 Produit cartésien

Soient A et B deux ensembles. Etant donné les élements $a \in A$ et $b \in B$, on appelle (a, b) une paire ordonnée. Dans ce contexte, a et b sont appelés coordonnées.

Définition

Le produit cartésien de A et B est l'ensemble
$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ et } b \in B\}$.

Remarque

$(a, b) \neq (b, a)$

$(a, b) = (a', b') \iff a = a' \text{ et } b = b'$

Exemples

$A = \{a, b, c\}, \ B = \{0, 1\}$

$A \times B = \{(a, 0), (a, 1), (b, 0), (b, 1), (c, 0), (c, 1)\}$

$B \times A = \{(0, a), (0, b), (0, c), (1, a), (1, b), (1, c)\}$

2-1-5 Produit cartésien

$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$
Le produit cartésien $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est appelé le plan cartésien.
$[0, 1] \times [0, 1] = [0, 1]^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1\}$
Nous généralisons la définition d'une paire ordonnée en définissant :
$A \times B \times C = \{(a, b, c) : a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\}$,
$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \text{ et } z \in \mathbb{R}\}$
$[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] = [0, 1]^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y, z \leq 1\}$
$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (n fois) est le n-espace cartésien.