Chapitre 1 Logique et raisonnements

1.0 Introduction :

La logique mathémaque permet l'étude des mathématiques comme un langage.
La logique mathématique est indispensable pour l'énonciation d'une proposition et l'étude de sa valeur de vérité. Donc c'est la base de tous les raisonnements mathématiques.

1.1 Proposition (énoncé mathématique)

Une proposition est un énoncé mathématique bien précis qui est vrai ou faux, mais pas les deux.
On note souvent une proposition par des lettres P, Q, R, ...

P < vraie → 1 ou V ; fausse → 0 ou F

table de vérité

P		P
1	ou	V
0		F

- Principe de non-contradiction : une proposition ne peut être vraie et fausse en même temps.
- Principe du tiers exclu : une proposition est soit vraie soit fausse mais pas une troisième possibilité.

Exemples :

- 374 est divisible par 11 (proposition vraie)
- L'entier naturel 4 est inférieur au nombre réel π. (Proposition fausse)
- $1+\sqrt{2}$ n'est pas une proposition, car elle n'a pas de valeur de vérité.
- $x+1>5$ n'est pas une proposition. La valeur de cet énoncé dépend de la variable x. Il devient une proposition si on choisit une valeur pour x. (cet énoncé est appelé une fonction propositionnelle ou un prédicat. (Prédicat))

Définition : Quand une proposition dépend d'une variable ou plusieurs variables, elle est appelée une fonction propositionnelle ou un prédicat.

Exemples :

- $P(x) : e^x \geq 1 \begin{cases} \text{vraie si } x \geq 0 \\ \text{fausse si } x < 0 \end{cases}$
- $Q(x,y)$: Pour tout réel x, il existe un réel y tel que $y > x$.

(vraie : pour chaque réel x, on peut choisir $y = x+1$)
$y = x+1 > x$.

1.2 Connecteurs logiques (opérateurs)

On est particulièrement intéressé par la combinaison des propositions par des connecteurs (opérateurs) logiques

Définition : Une proposition composée est un énoncé obtenu en combinant des propositions avec des connecteurs logiques

1.2.1 Négation d'une proposition.

La négation d'une proposition P dénotée par :

non(P) ou $\neg P$ ou $\overline{P}$.

sa table de vérité.

P	$\overline{P}$
1	0
0	1

ou

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

$\boxed{\overline{(\overline{P})} \text{ est } P}$

Exemples :

- $P : |x| \leq 1$ – $\overline{P} : |x| > 1$ 
- Q : 4 est pair – $\overline{Q}$: 4 n'est pas pair c'est à dire 4 est impair.
- R : Tous les étudiants sont dans la salle de cours
  $\overline{R}$: Il y a un étudiant qui n'est pas dans la salle de cours.

1.2.2 Équivalence $\Longleftrightarrow$

$P \Longleftrightarrow$ est la proposition " P est équivalent à Q " ou " P si et seulement si Q "

$P \Longleftrightarrow Q$ est vraie lorsque P et Q sont toutes les deux vraies ou toutes les deux falses.

P	Q	$P \Longleftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

deux propositions sont équivalentes, s'ils ont des tables de vérité identiques.

Exemples :

- $(a \cdot b = 0) \Longleftrightarrow (a = 0 \text{ or } b = 0)$ pour $a, b \in \mathbb{R}$
- n est ~~pair~~ $\Longleftrightarrow n^2$ est pair pour $n \in \mathbb{N}$

1.2.3 Conjonction " et " $\wedge$

table de vérité

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

$P \wedge \overline{P}$ est toujours fausse.
(Principe de non contradiction)

cette fois pour que $P \wedge Q$ soit vraie, nous avons besoin que P et Q soient vraies (fausse sinon).

Exemples.

- $\underbrace{(3 \text{ est premier})}_{P}$ $\underbrace{\text{et}}_{\wedge}$ $\underbrace{(3 \text{ divise } 12)}_{Q}$ $\longrightarrow$ vraie.
- n est un entier naturel pair et impair $\longrightarrow$ fausse
- $x > -1$ and $x < 1$ signifie $|x| < 1$

1.2.4 Disjonction " ou " $\vee$.

table de vérité

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

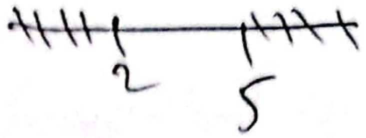
$P \vee \overline{P}$ est toujours vraie.
(Principe du tiers exclu)

$P \vee Q$ est fausse lorsque P et Q sont fausses et vraie sinon.

Exemples

- $\underbrace{(2 \text{ n'est pas premier})}_{P}$ $\underbrace{\text{ou}}_{\vee}$ $\underbrace{(2 \text{ divise } 5)}_{Q}$ fausse
- $x < -1$ ou $x > 1$ signifie $|x| > 1$.
- n est un entier naturel pair ou impair. vraie

- $x \leq 2$ ou $x \geqslant 5$
  P $\vee$ Q



~~Si~~ si $x = 1$ alors $P \vee Q$ est vraie
si $x = 3$ alors $P \vee Q$ est fausse.

Remarque : Ou exclusive "$\oplus$"

Dans le langage courant, il y a un autre "ou" (exclusive)

Exemple : L'étudiant choisit mathématique ou informatique mais pas les deux.

P	Q	$P \oplus Q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

L'énoncé $P \oplus Q$ est vrai si et seulement si exactement un des énoncés est vraie.

Lois de De Morgan : Négation de $\wedge$ et $\vee$

$$\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q} \quad \text{et} \quad \overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$$

Preuve par table de vérité.

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \wedge Q$	$\overline{P \wedge Q}$	$\overline{P} \vee \overline{Q}$	$P \vee Q$	$\overline{P \vee Q}$	$\overline{P} \wedge \overline{Q}$
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1	0	1	1

Définition : (Tautologie - antilogie (contradiction)

Une proposition qui est toujours vraie s'appelle une tautologie.
Une proposition qui est toujours fausse s'appelle une antilogie ou une contradiction.

Exemples :

$P \vee \bar{P}$ est une tautologie - $P \wedge \bar{P}$ est une contradiction.

1.2.5 Implication : $\Longrightarrow$ if ... then ...

c'est un connecteur (opérateur) essentiel en mathématiques, car c'est grâce à lui que les mathématiques avancent. Il nous permet d'énoncer des nouvelles vérités.

$P \Rightarrow Q$ est la proposition "P implique Q" ou "si P alors Q" qui est fausse lorsque P est vraie et Q est fausse et vraie sinon.

La définition mathématique une implication est :

$$\boxed{[P \Rightarrow Q] \Longleftrightarrow [\bar{P} \vee Q]}$$

table de vérité

P	Q	$\bar{P}$	$P \Rightarrow Q$	$\bar{P} \vee Q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

$(P \Rightarrow Q)$ et $(\bar{P} \vee Q)$ ont des tables de vérité identiques

P est une condition suffisante pour Q

Q est une condition necessaire pour P

exemples :

- $1=2 \Longrightarrow 3=4$ Vraie.

(car si on suppose que $1=2$ alors en ajoutant 2 aux côtés de cette égalité, on obtient $3=4$.)

- $0 \leq x \leq 100 \Longrightarrow \sqrt{x} \leq 10$ vraie (Prener la racine carrée)
- $\sin x = 0 \Longrightarrow x = 0$ fausse (voir pour $x = 2\pi$).

Remarque : $[P \Longleftrightarrow Q] \Longleftrightarrow [P \Longrightarrow Q] \wedge [Q \Longrightarrow P]$

P	Q	$P \Longleftrightarrow Q$	$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow P$	$(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1

Négation d'une implication :

On sait que $[P \Longrightarrow Q] \Longleftrightarrow [\overline{P} \vee Q]$ → définition de $\Longrightarrow$

donc $\overline{P \Longrightarrow Q} \Longleftrightarrow \overline{\overline{P} \vee Q} \Longleftrightarrow (\overline{\overline{P}}) \wedge \overline{Q}$ → lois de De Morgan

ainsi $\boxed{[\overline{P \Longrightarrow Q}] \Longleftrightarrow (P \wedge \overline{Q})}$

Exemples

$a, b \in \mathbb{R}$.

R : $(a=0)$ ou $(b=0) \Longrightarrow a.b=0$ vraie.

$\overline{R}$: $(a=0$ ou $b=0)$ et $a.b \neq 0$ false.

Inverse d'une implication

$Q \Rightarrow P$ est appelée l'implication inverse de $P \Rightarrow Q$

$Q \Rightarrow P$ n'est pas équivalent à $P \Rightarrow Q$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	1

$$\boxed{[P \Rightarrow Q] \not\Leftrightarrow [Q \Rightarrow P]}$$

Exemple.

Pour $x \in \mathbb{R}$. $x > 5 \Rightarrow x > 1$ vraie

$x > 1 \Rightarrow x > 5$ fausse.

(par exemple $x = 3$.)

Contraposée d'une implication.

$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ est appelée la contraposée de $P \Rightarrow Q$.

$\boxed{\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}}$ ~~est~~ équivalente à $P \Rightarrow Q$

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \Rightarrow Q$	$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

$$[\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}] \Leftrightarrow [P \Rightarrow Q]$$

Exemples :

- $[(a=0 \text{ ou } b=0) \Longrightarrow a.b=0] \Longleftrightarrow [ab \neq 0 \Longrightarrow a \neq 0 \text{ et } b \neq 0]$
- $[n \neq 2 \text{ et } n \text{ est premier} \Longrightarrow n \text{ impair}] \Longleftrightarrow [n \text{ pair} \Longrightarrow n = 2 \text{ ou } n \text{ n'est pas premier}]$

A retenir

$[P \Longrightarrow Q] \Longleftrightarrow [\overline{P} \vee Q]$ définition de $\Longrightarrow$

$[\overline{P \Longrightarrow Q}] \Longleftrightarrow [P \wedge \overline{Q}]$ négation de $\Longrightarrow$

$[P \Longrightarrow Q] \Longleftrightarrow [\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}]$ La contraposée

$[Q \Longrightarrow P] \not\Longleftrightarrow [P \Longrightarrow Q]$ implication réciproque

$[P \Longleftrightarrow Q] \Longleftrightarrow [(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P)]$

1.3 Propriétés des connecteurs logiques.

- $\overline{(\overline{P})} \Longleftrightarrow P$, $P \wedge Q \Longleftrightarrow Q \wedge P$, $P \vee Q \Longleftrightarrow Q \vee P$.
- $P \wedge P \Longleftrightarrow P$, $P \vee P \Longleftrightarrow P$
- $(P \wedge Q) \wedge R \Longleftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$, $(P \vee Q) \vee R \Longleftrightarrow P \vee (Q \vee R)$.
- $P \wedge (Q \vee R) \Longleftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
- $P \vee (Q \wedge R) \Longleftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
- $\overline{P \wedge Q} \Longleftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$, $\overline{P \vee Q} \Longleftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$
- $[P \Longrightarrow Q] \Longleftrightarrow \overline{P} \vee Q$, $\overline{P \Longrightarrow Q} \Longleftrightarrow P \wedge \overline{Q}$, $[P \Longrightarrow Q] \Longleftrightarrow [\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}]$
- $[P \Longleftrightarrow Q] \Longleftrightarrow [(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P)]$
- $[(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R)] \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$
- $P \wedge \overline{P}$ fausse, $P \wedge F$ fausse où F est fausse.
- $P \vee \overline{P}$ vraie $P \vee V$ vraie où V est vraie

1.4 Quantificateurs mathématiques.

En mathématiques, on utilise souvent des expressions de la forme "pour tout", quel que soit, il existe au moins "il existe un unique".

Ces expressions sont appellées quantificateurs. Le mot quantificateur vient du mot quantité.

~~there~~ On distingue deux types de quantificateurs.

- Quantificateur universel : $\forall$

  $\forall x$, pour tout x ou quel que soit x.

  $\forall x, P(x)$ signifie que le prédicat $P(x)$ est vraie pour toutes les valeurs possibles de x.

- Quantificateur existentiel $\exists$

  $\exists x$, there exists x or there exists at least x or there is.

  $\exists x, P(x)$ signifie qu'il existe un x où $P(x)$ est vraie.

Parfois, on utilisera aussi $\exists! x, P(x)$,

$\exists! x, P(x)$, signifie qu'il existe un unique x où $P(x)$ est vraie.

On considère l'énoncé $\overline{\forall x, P(x)}$.

Cela affirme que $P(x)$ est vrai pour toutes les valeurs de x. Ainsi, s'il est faux, alors cela signifie qu'il existe un x tel que $P(x)$ est fausse.

De la même manière, l'énoncé $\overline{\exists x, P(x)}$, affirme qu'il existe un x où $P(x)$ est vraie. Ainsi, s'il est faux, cela signifie pour pour toutes les valeurs de x, $P(x)$ est fausse, c'est à dire $\overline{P(x)}$ est vraie.

Nous avons donc ce qui suit :

$$\boxed{\begin{array}{c} \overline{\forall x, P(x)} \iff \exists x, \overline{P(x)} \\ \overline{\exists x, P(x)} \iff \forall x, \overline{P(x)} \end{array}}$$

Exemples :

- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0 \longrightarrow$ vraie.
  Pour tout nombre réel x, ~~son~~ carré ~~est~~ supérieur ou égal à zéro.
- $\exists x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0$ fausse.
  Il existe un nombre réel dont le carré est inférieur strictement à zéro.
- $\exists ! n \in \mathbb{N} / n < 1$. vraie ($n = 0$, unique)
  Il existe un unique entier naturel strictement inférieur à un.

Remark:

- Certains énoncés dépendent de plusieurs quantificateurs.

L'énoncé : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y > x \longrightarrow$ vraie

signifie que pour tout réel x, il existe un réel y superieur strictement à x.

cet énoncé est vrai (pour $x \in \mathbb{R}$, on peut choisir $y = x+1$)

- L'ordre des quantificateurs est très important.

l'énoncé : $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y > x$ est fausse.

(il n'existe aucun réels qui superieur à tous les autres réels.

Remark:

$$\forall x, \exists y, P(x,y) \not\Leftrightarrow \exists y, \forall x, P(x,y)$$

$$\exists x, \forall y, P(x,y) \not\Leftrightarrow \forall y, \exists x, P(x,y)$$

$$\forall x, \forall y, P(x,y) \Leftrightarrow \forall y, \forall x, P(x,y)$$

$$\exists x, \exists y, P(x,y) \Leftrightarrow \exists y, \exists x, P(x,y)$$

$$\overline{\forall x, \exists y, P(x,y)} \Leftrightarrow \forall x, \exists y, \overline{P(x,y)}$$

$$\overline{\exists x, \forall y, P(x,y)} \Leftrightarrow \forall x, \exists y, \overline{P(x,y)}$$

Négation de : $\exists! x, P(x)$

$$[\exists! x \in E, P(x)] \Leftrightarrow \underbrace{[\exists x \in E, P(x)]}_{\text{existence}} \text{ et } \underbrace{[\forall x, x' \in E, P(x), P(x') \Rightarrow x = x']}_{\text{unicité.}}$$

Donc

$\overline{\exists!\, x\in E, P(x)} \iff \overline{\exists x\in E, P(x)}$ ou $\overline{\forall x, x', P(x), P(x') \Rightarrow x = x'}$

$\overline{\exists!\, x\in E, P(x)} \iff \left[\forall x\in E, \overline{P(x)}\right]$ ou $\left[\exists x, x', P(x), P(x') \text{ et } x \neq x'\right]$

Contre-exemple :

$\exists!\, x\in\mathbb{R}, \ln x = 1 \longrightarrow$ vraie, $x = e$ est unique

$\overline{\exists!\, x\in\mathbb{R}, \ln x = 1} \iff \left[\forall x\in\mathbb{R}, \ln x \neq 1\right]$ ou $\left[\exists x, x'\in\mathbb{R}, \ln x = \ln x' = 1 \text{ et } x \neq x'\right]$

fausse fausse