1-5 **Méthodes de raisonnements**

Contenu

1. Méthode directe.
2. Disjonction des cas
3. Contraposition
4. Absurde
5. Contre exemple
6. Equivalences successives
7. Récurrence.

Méthode directe

- On veut montrer que la proposition «$P \Longrightarrow Q$ » est vraie.
- On suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie.
- C'est la méthode à laquelle vous êtes la plus habitué.

Exemple 1

- Soit n un entier naturel.
  Montrer que : n est pair $\Longrightarrow n^2$ est pair
- n est pair $\Longrightarrow \exists\ k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$
  On a $n^2 = (2k)^2 = 2\left(2k^2\right) = 2l$ avec $l = 2k^2 \in \mathbb{N}$.
- Et par suite n^2 est pair

Exemple 2

- Montrer que: $x, y \in \left]-1,1\right[\Longrightarrow \dfrac{x+y}{1+xy} \in \left]-1,1\right[$.
- Soit $x, y \in \left]-1,1\right[$.
$$\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2 - 1 = \frac{(x+y)^2-(1+xy)^2}{(1+xy)^2} = \frac{x^2+y^2-1-x^2y^2}{(1+xy)^2}$$
$$= \frac{x^2-1+y^2\left(1-x^2\right)}{(1+xy)^2} = \frac{\left(x^2-1\right)\left(1-y^2\right)}{(1+xy)^2} < 0$$
car $x, y \in \left]-1,1\right[$, et $x^2 < 1,\ y^2 < 1$
$$\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2 - 1 < 0 \Longrightarrow \left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2 < 1 \Longrightarrow \left|\frac{x+y}{1+xy}\right| < 1$$
- Finalement : $\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)^2 - 1 < 0 \Longrightarrow \dfrac{x+y}{1+xy} \in \left]-1,1\right[$.

DISJONCTION DES CAS

- Si l'on souhaite vérifier une proposition $P(x)$ pour tous les x dans un ensemble E,

1. on montre la proposition pour les x dans une partie A de E,
2. puis pour les x n'appartenant pas à A.

- C'est la méthode de disjonction des cas ou cas par cas.

Exemple 1

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $n\,(n+1)\,(n+2)$ est pair.
- 1^{er} *cas* : n est pair $\exists\ k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$
  $n\,(n+1)\,(n+2) = 2k(2k+1)\,(2k+2) = 2l$ avec
  $l = k(2k+1)\,(2k+2) \in \mathbb{N}$
  donc $n\,(n+1)\,(n+2)$ est pair.
- $2^{ème}$ *cas* : n est impair $\exists\ k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$
  $$\begin{aligned} n\,(n+1)\,(n+2) &= (2k+1)\,(2k+2)\,(2k+3) \\ &= 2(2k+1)(k+1)(2k+3) \\ &= 2l \text{ avec } l = (2k+1)(k+1)(2k+3) \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$
  donc $n\,(n+1)\,(n+2)$ est pair.
- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ n\,(n+1)\,(n+2)$ est pair.

Exemple 2

- Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, |x-2| \leq x^2 - 3x + 3$$

-
$$\text{Si } x \geq 2, |x-2| = x - 2 \leq x^2 - 3x + 3$$

$$\text{Donc } x^2 - 4x + 5 \geq 0 \text{ c'est vrai car } \triangle < 0$$

-
$$\text{Si } x < 2, |x-2| = 2 - x \leq x^2 - 3x + 3$$

$$\text{Donc } x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0 \text{ c'est vrai}$$

- Conclusion :
$$\forall x \in \mathbb{R}, |x-2| \leq x^2 - 3x + 3$$

Contraposition

- Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante

$$(P \implies Q) \iff (\overline{Q} \implies \overline{P})$$

- Donc si l'on souhaite montrer la proposition $P \implies Q$
- On montre en fait que si $\overline{Q}$ est vraie alors $\overline{P}$ est vraie

Exemple 1

- Soit $n \in \mathbb{N}$
  Montrer que : n^2 est pair $\Longrightarrow$ n est pair.
- n impair $\Longrightarrow \exists\ k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$
  On a
  $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1 = 2l + 1$
  avec $l = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$.
  Et par suite n^2 est impair
- Conclusion : n^2 est pair $\Longrightarrow$ n est pair.

Exemple 2

- Soit $x, y \in \mathbb{R}$.
  Montrer que :

$$x \neq y \text{ et } xy \neq 1 \Longrightarrow \frac{x}{x^2+x+1} \neq \frac{y}{y^2+y+1}$$

Exemple 2

- $$\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{y}{y^2+y+1} \Longrightarrow x\left(y^2+y+1\right) = y\left(x^2+x+1\right)$$
$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow xy^2+xy+x = yx^2+yx+y\\
&\Longrightarrow xy^2+x-yx^2-y = 0\\
&\Longrightarrow xy\left(y-x\right)+x-y = 0\\
&\Longrightarrow \left(x-y\right)\left(xy-1\right) = 0\\
&\Longrightarrow x-y = 0 \text{ ou } xy-1 = 0\\
&\Longrightarrow x = y \text{ ou } xy = 1
\end{aligned}$$
- Finalement : $x \neq y$ et $xy \neq 1 \Longrightarrow \dfrac{x}{x^2+x+1} \neq \dfrac{y}{y^2+y+1}$

Absurde

- Soit R une proposition. On sait que $R \vee \overline{R}$ est vraie.
- Pour montrer que R est vraie, on suppose que R est fausse i.e $\overline{R}$ est vraie et on montre qu'on obtient une contradiction.
- Si R est une implication, $R \approx P \Longrightarrow Q$
  on a $\overline{P \Longrightarrow Q} \Longleftrightarrow P \wedge \overline{Q}$
- Le raisonnement par l'absurde pour montrer $P \Longrightarrow Q$ repose sur le principe suivant :
  on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction.
- Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc $P \Longrightarrow Q$ est vraie.

Exemple 1

- Montrons par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
- On suppose que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Longrightarrow \sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ avec a et b des entiers premiers entre eux $\left(\text{ou la fraction } \dfrac{a}{b} \text{ est irriductible}\right)$
  $$\Longrightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Longrightarrow a^2 = 2b^2 \Longrightarrow a^2 \text{ est pair} \Longrightarrow a \text{ est pair}$$
  donc $a = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$
  d'où $a^2 = 2b^2 \Longrightarrow (2k)^2 = 2b^2 \Longrightarrow b^2 = 2k^2$
  $$\Longrightarrow b^2 \text{ est pair} \Longrightarrow b \text{ est pair}$$
  a et b sont les deux pairs, ce qui contredit l'hypothèse (a et b sont premiers entre eux).
- Conclusion : $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exemple 2

- Soit $a, b > 0$.
  Montrer que:

$$\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \implies a = b$$

Exemple 1

- Supposons que $\dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a}$ et $a \neq b$

  $$\begin{aligned}\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} &\implies a\,(1+b) = b\,(1+a)\\ &\implies a + a^2 = b + b^2 \implies a - b + a^2 - b^2 = 0\\ &\implies (a-b) + (a-b)\,(a+b) = 0\\ &\implies (a-b)\,(1+a+b) = 0\end{aligned}$$

  et comme $a \neq b$, alors $1 + a + b = 0$

  c'est une contradiction, car $a, b > 0$.
- Conclusion : $\dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a} \implies a = b$

Contre exemple

- Si l'on veut montrer qu'une proposition de la forme $\forall x \in E,\ P(x)$ est vraie, alors pour chaque $x \in E$, il faut montrer que $P(x)$ est vraie.
- Par contre, pour montrer que cette proposition est fausse, alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse.
- Rappelez-vous la négation de $\overline{\forall x \in E, P(x)}$ est $\exists\ x \in E, \overline{P(x)}$
- Trouver un tel $x \in E$ c'est trouver un contre-exemple à la proposition $\forall x \in E,\ P(x)$.

Exemple 1

- Montrer que la proposition suivante est fausse
  Tout entier positif est la somme de trois carrés.
  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists\ a, b$ et $c \in \mathbb{N}\ ,\ n = a^2 + b^2 + c^2$ est fausse.
- Les carrés sont $0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots$
- Un contre example est 7.Les carrés inférieurs à 7 sont $0, 1$ et 4.Mais avec trois de ces nombres, on ne peut pas faire 7.

Exemple 2

- Montrer que la proposition suivante est fausse
  $\forall x, y \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + y^2} = x + y$
- $\exists\ x = -1$ et $y = 1$ tel que $\sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ et $x + y = 0$.

Equivalences successives

- Si les équivalences suivantes sont vraies :
  $P \iff Q_1,\ Q_1 \iff Q_2,\ Q_2 \iff Q_3, \ldots Q_n \iff Q$
- On a aussi l'équivalence vraie : $P \iff Q$.
- Nous écrivons alors pour simplifier l'écriture :
  $P \iff Q_1 \iff Q_1 \iff Q_2 \iff Q_2 \iff Q_3 \ldots Q_n \iff Q$

Exemple

- Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que
  $\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2\right) \Longleftrightarrow (x=y=0)$
  $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2 \Longleftrightarrow \sqrt{x^2+1}-1+\sqrt{y^2+1}-1=0$
- Comme $x^2 \geq 0$ et $y^2 \geq 0$, alors $x^2+1 \geq 1$ et $y^2+1 \geq 1$
  et par suite $\sqrt{x^2+1}-1 \geq 0$ et $\sqrt{y^2+1}-1 \geq 0$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2 &\Longleftrightarrow \sqrt{x^2+1}-1+\sqrt{y^2+1}-1=0 \\
&\Longleftrightarrow \sqrt{x^2+1}-1=0 \text{ et } \sqrt{y^2+1}-1=0 \\
&\Longleftrightarrow \sqrt{x^2+1}=1 \text{ et } \sqrt{y^2+1}=1 \\
&\Longleftrightarrow x^2=0 \text{ et } y^2=0 \\
&\Longleftrightarrow x=0 \text{ et } y=0
\end{aligned}
$$

- Conclusion : $\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2\right) \Longleftrightarrow (x=y=0)$

Récurrence

- Le principe de récurrence permet de montrer qu'une proposition $P(n)$, dépendant de $n \in \mathbb{N}$, est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$ ou $\forall n \geq n_0$ $(n_0 \geq 1)$
- La démonstration par récurrence se déroule en trois étapes :
- 1 *ère étape*: $(Initialisation)$ on vérifie que $P(n_0)$ est vraie.
- 2 *ème étape*: $(Hérédité)$ Hypothèse de récurrence, on suppose que $P(n)$ est vraie pour $n \geq n_0$ et on démontre alors que la proposition $P(n+1)$ au rang suivant est vraie. $(P(n) \Longrightarrow P(n+1))$
- 3 *ème* étape: $(Conclusion)$ Enfin dans la conclusion, on rappelle que par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie $\forall n \geq n_0$.

Exemple 1

- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : 7^{2n} - 1$ est divisible par 12. $\left(12/7^{2n} - 1\right)$.
- Notons par $P(n) : 7^{2n} - 1$ est divisible par 12.
  Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie.
- 1 *ère étape*: (*Initialisation*) Pour $n = 0$, on a $7^{2.0} - 1 = 1 - 1 = 0$ comme 0 est multiple de 12 $(0 = 12.0)$, alors $P(0)$ est vraie.

- 2 *ème étape*: $(Hérédité)$ on suppose que $P(n)$ est vraie pour $n \geq 0$ et on démontre que $P(n+1)$ est vraie.
  C'est à dire, on suppose que $7^{2n} - 1$ est divisible par 12
  $\left(7^{2n} - 1 = 12.k \text{ avec } k \in \mathbb{N}\right)$
  et on montre que $7^{2(n+1)} - 1$ est divisible par 12
  $\left(7^{2(n+1)} - 1 = 12.l \text{ avec } l \in \mathbb{N}\right)$
- On a
  $12/7^{2n} - 1 \Longrightarrow \exists\ k \in \mathbb{N} : 7^{2n} - 1 = 12.k \Longrightarrow 7^{2n} = 12.k + 1.$
  $$\begin{aligned} 7^{2(n+1)} - 1 &= 7^{2n+2} - 1 = 7^2.7^{2n} - 1 \\ &= 49.(12.k + 1) - 1 \\ &= 49.12.k + 49 - 1 = 49.12.k + 48 \\ &= 49.12.k + 12.4 = 12.(49k + 4) \\ &= 12l \text{ avec } l = 49k + 4 \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$
  Ce qui prouve que $7^{2(n+1)} - 1$ est divisible par 12.
- Donc $P(n+1)$ est vraie.

Exemple 1

- 3 *ème* étape: $(Conclusion)$ Par le principe de récurrence on déduit que $P(n)$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$, c'est à dire, $\forall n \in \mathbb{N}$: $7^{2n} - 1$ est divisible par 12.
- **Remarque** :

$$\begin{aligned} 7^{2n} - 1 = 12.k &\Longrightarrow 7^{2n} = 1 + 12.k \\ &\Longrightarrow 7^2.7^{2n} = 7^2.(1 + 12.k) = 7^2 + 7^2.12.k \\ &\Longrightarrow 7^{2n+2} - 1 = 7^2 + 7^2.12.k - 1 \\ &\Longrightarrow 7^{2n+2} - 1 = 48 + 7^2.12.k = 12.(4 + 49.k) = 12.l. \end{aligned}$$

Exemple 2

- Montrer que par récurrence que
  $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n\left(n+1\right)}{2}.$
- 1 *ère étape*: $\left(Initialisation\right)$ pour $n = 1$,on a
  $$S_1 = \sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1.\left(1+1\right)}{2} = 1$$
  Donc la propriété est vraie pour $n = 1$
- 2 *ème étape*: $\left(Hérédité\right)$ Supposons que $S_n = \dfrac{n\left(n+1\right)}{2}$
  et montrons que $S_{n+1} = \dfrac{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}{2}$

Exemple 2

- On a $S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k = \underbrace{1+2+3+\ldots+n}_{S_n} + (n+1)$

  donc $S_{n+1} = S_n + (n+1) = \dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1)$

  (Hypothèse de récurrence)

  $$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

  donc $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

  C'est à dire que la propriété est vraie pour $n+1$

- 3 *ème* étape: (*Conclusion*) Par le principe de récurrence on déduit que

  $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Symboles somme et produit

- $\sum$ somme : $\underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}_{n \text{ termes}} = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j$

  $\underbrace{a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}_{(n+1) \text{ termes}} = \sum_{k=0}^{n} a_k$

- Si $\forall k = 1, 2, \dots n$, on a $a_k = a$ alors $\sum_{k=1}^{n} a = \underbrace{a + a + a + \dots + a}_{n \text{ termes}} = n.a$

  $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$ et $\sum_{k=0}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{(n+1) \text{ termes}} = (n+1).1 = n+1$

- $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Symboles somme et produit

- $\prod$ produit : $\underbrace{a_1.a_2.a_3....a_n}_{n \text{ termes}} = \prod_{k=1}^{n} a_k$, $\underbrace{a_0.a_1.a_2.a_3....a_n}_{(n+1) \text{ termes}} = \sum_{k=0}^{n} a$

- Si $\forall k = 1, 2, ...n$, on a $a_k = a$ alors $\prod_{k=1}^{n} a = \underbrace{a.a.a...a}_{n \text{ termes}} = a^n$

$$\prod_{k=1}^{n} 1 = \underbrace{1.1.1...1}_{n \text{ termes}} = 1^n = 1 = n \quad \text{et}$$

$$\prod_{k=0}^{n} 1 = \underbrace{1.1.1...1}_{(n+1) \text{ termes}} = 1^{n+1} = 1, \prod_{k=1}^{n} k = 1.2.3....n = n! \ (\text{factorielle n}) .$$

- $\prod_{k=1}^{n} (a_k.b_k) = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right).\left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)$, $\prod_{k=0}^{n} \lambda a_k = \lambda^n \prod_{k=1}^{n} a_k$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.